تپه‌های شنی

روزبه فرهودی

۱ مفاهیم اولیه

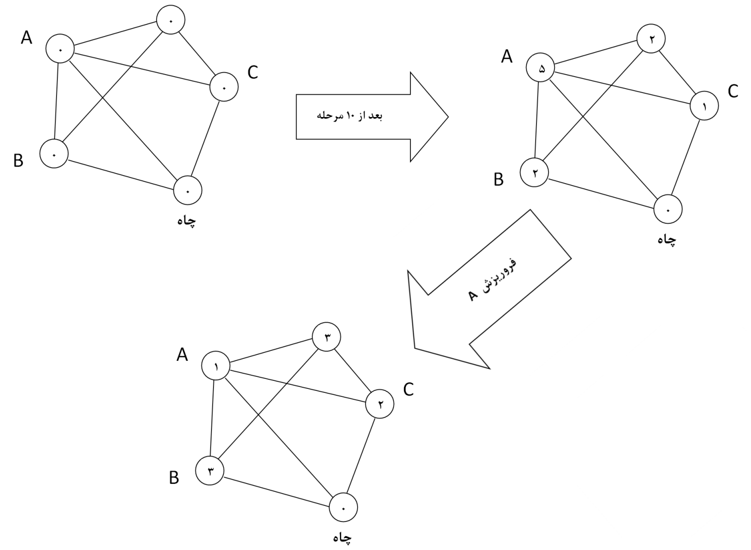
فرض کنید G گرافی همبند[۱] است. یک رأس از G انتخاب می‌کنیم و آن را چاه می‌نامیم و روی تمام رأسهای گراف عدد صفر می‌گذاریم. (شکل **??**) در هر مرحله رأسی دلخواه انتخاب می‌کنیم و عدد آن را یک واحد افزایش می‌دهیم. این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که برای اولین بار عدد رأسی که افزایش یافته از درجه‌اش بیشتر شود. مثلاً در گراف شکل **??** بعد از ۱۰ مرحله عدد رأس A از درجه‌اش که چهار است بیشتر است. در این صورت قبل از این که به مرحله بعد برویم، فروریزش‌ای رخ می‌دهد و از عدد نوشته شده در رأس A به اندازه درجه اش کم می‌شود و در عوض به اعداد رأسهای مجاورش یک واحد افزوده می‌شود. (به غیر از رأس چاه که عدد آن همواره صفر است.) بعد از این فروریزش اگر دوباره عدد رأسی بیشتر از درجه‌اش باشد برای آن هم فروریزش رخ می‌دهد. در این‌جا بعد از فروریزش رأس A عدد هیچ رأسی بیش از درجه‌اش نیست ولی اگر در مرحله بعد رأس B را انتخاب کنیم و به آن یک واحد بیافزاییم، ابتدا خود این رأس فروریزش می‌کند و متعاقب آن عدد رأس C بیش از درجه‌اش خواهد شد و درنتیجه آن هم فروریزش می‌کند. البته ممکن است در مراحل بعدی با وضعیتی روبرو شویم که فروریزش یک رأس به شکل دومینو-وار باعث فروریزش تعداد زیادی از رئوس دیگر شود و این سوال مطرح می‌شود که برای رسیدن به حالت نهایی به چه ترتیبی باید این فروریزش‌ها انجام بگیرد. حتی می‌توان تصور کرد در وضعیتی قرار گیریم که بعد از افزایش یک رأس در گراف تا ابد فروریزش رخ دهد.
خوشبختانه این ابهامات جواب‌های روشنی دارند: اولاً امکان ندارد تا ابد فروریزش داشته باشیم و ثانیاً ترتیب فروریزش‌ها اهمیتی در حالت نهایی ندارد. قبل از اثبات بهتر است به این عددگذاری‌ها روی گراف نامی دهیم.

تعریف ۱. *به هر تابع از رئوس گراف به اعداد صحیح نامنفی که در رأس چاه مقدارش صفر باشد یک تپه شنی می‌گوییم و اگر عدد هر رأس از درجه‌اش کمتر یا مساوی باشد آن را تپه پایدار می‌نامیم.*

مشاهده می‌کنیم که مجموع اعداد رئوس یک تپه شنی در طی فروریزش‌ها یا بی‌تغییر می‌ماند یا کاهش می‌یابد. زیرا عدد هر رأسی که فروریزش می‌کند به اندازه درجه‌اش کاسته می‌شود ولی در عوض به عدد تمام رأسهای مجاور آن که تعدادشان برابر درجه‌اش است یک واحد افزوده می‌شود. درنتیجه اگر یکی از این رئوس مجاور چاه باشد مجموع اعداد رئوس کاهش می‌یابد و در غیر این صورت ثابت باقی می‌ماند.

قضیه ۲. *امکان ندارد در تپه‌ای شنی نامتناهی فروریزش رخ دهد تا به تپه پایدار تبدیل شود.*

[۱] گرافی که هر دو رأسش با مسیری در گراف به هم متصل باشند.



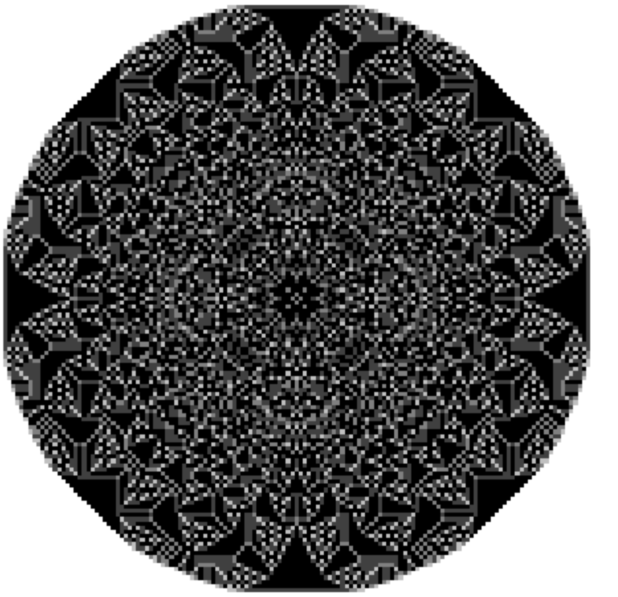
شکل ۱: در این گراف ابتدا همه اعداد صفر است ولی بعد از ۱۰ مرحله رأسی ناپایدار می‌شود و فروریزش می‌کند.

اثبات. همسایه‌های رأس چاه را در نظر بگیرید. این رئوس متناهی‌بار می‌توانند فروریزش کنند. زیرا به ازای هر فروریزش آن‌ها یک واحد از مجموع اعداد رئوس کاسته می‌شود. در نتیجه رئوس مجاور با چاه حداکثر به اندازه مجموع اعداد رئوس می‌توانند فروریزش کنند.
حال رئوسی را که فاصله‌شان با رأس چاه دو است در نظر بگیرید. برای آن‌ها نیز مقدار مشخصی وجود دارد که بیش از آن نمی‌توانند فروریزش کنند زیرا به ازای هر فروریزش آن‌ها یک واحد به رأسهای مجاور چاه افزوده می‌شود.
به همین شکل برای رئوس با فاصله مشخص از چاه کرانی به دست می‌آوریم که این رئوس حداکثر به آن اندازه فروریزش می‌کنند.
از آنجا که گراف همبند است و هر رأسی درفاصله‌ای از چاه است نتیجه می‌شود هر تپه‌ای بعد از تعداد متناهی فروریزش به تپه‌ای پایدار تبدیل می‌شود. □

بنابراین تا اینجای کار مطمئن هستیم بعد از تعدادی فروریزش به تپه‌ای پایدار می‌رسیم.

قضیه ۳. *ترتیب فروریزش‌ها اهمیتی در نتیجه نهایی ندارد.*

اثبات. به عبارت دیگر اگر c یک تپه شنی باشد و به دو طریق مختلف فروریزش‌ها رخ دهند، در انتها به یک تپه پایدار می‌رسیم. یک ترتیب از فروریزش‌ها را با یک دنباله $(v_۱, v_۲ \dots, v_n)$ از رئوس گراف نمایش می‌دهیم که نشان می‌دهد ابتدا رأس $v_۱$، سپس رأس $v_۲$ و ... فروریزش کرده‌اند تا تپه c به تپه‌ای پایدار تبدیل شود. ترتیب دیگری از فروریزش‌ها مانند $(w_۱, w_۲ \dots, w_m)$ را برای c در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم که تعداد اعضای این دو دنباله یکی است، یعنی $m = n$ و دنباله دوم جایگشتی از دنباله اول است. اگر این ادعا درست باشد یکی بودن تپه پایدار نهایی نتیجه می‌شود. زیرا در این صورت می‌توان محاسبه کرد هر رأس در گراف دقیقاً چند بار فروریزش کرده است و با ضرب کردن درجه یک رأس در تعداد فروریزش‌های آن و کم کردن تعداد فروریزش‌های رأس‌های مجاور آن مقدار آن را در تپه پایدار نهایی بدست می‌آید.
در دنباله اول رأس $v_۱$ فروریزش کرده است و در نتیجه عدد این رأس در تپه c بیش از درجه‌اش بوده است و بنابراین اگر به دنباله دوم نگاه کنیم حتماً در جایی باید رأس $v_۱$ را بیابیم. (در واقع اگر این رأس در نباله دوم نباشد عدد آن به علت فروریزش رأسهای مجاورش حتی بیشتر خواهد شد که با پایدار بودن تپه نهایی در تناقض است.) مثلاً فرض کنید $w_i = v_۱$ و i کوچکترین عدد



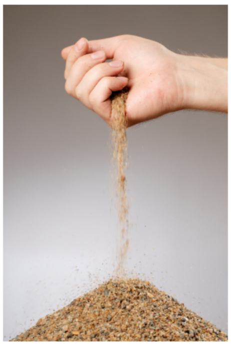
شکل ۲: در این‌جا رئوس متناسب با عددشان سیاه شده‌اند. رئوس با درجه ۴ کاملاً سیاه هستند.

با این ویژگی باشد. می‌خواهیم با جابه‌جا کردن رأس w_i آن را به ابتدای دنباله بیاوریم.
سمت راست w_i، رأس w_{i-1} نوشته شده است. دو حالت می‌توان در نظر گرفت:
اول این که w_{i-1} و w_i همسایه نباشند که در این صورت فروریزش w_{i-1} تاثیری در عدد w_i ندارد. یعنی قبل از فروریزش w_{i-1} هم رأس w_{i-1} ناپایدار بوده و در نتیجه می‌توان جای آن‌ها را برعکس کرد یعنی ترتیب $(w_1, w_2 \dots, w_i, w_{i-1}, \dots, w_m)$ را در نظر بگیریم. حالت دوم این است که این دو رأس همسایه باشند. در این صورت استدلال بالا مخدوش می‌شود زیرا ممکن است فروریزش w_{i-1} رأس w_i را آماده فروریزش کند. برای اینکه نشان دهیم این دو رأس را می‌توان جابه‌جا کرد کافی است بگوییم که قبل از فروریزش رأس w_{i-1} ، w_i ناپایدار بوده است. اما توجه کنید که w_i همان v_1 است و این رأس از فروریزش اول تا $i-1$ ام هنوز فروریزش نکرده و در نتیجه هنوز رأسی ناپایدار است. بنابراین قبل از فروریزش w_{i-1}، رأس w_i ناپایدار بوده و در نتیجه می‌توان این دو را جابه‌جا کرد. یعنی می‌توان w_i را با رأس مجاورش جابه‌جا کرد.
به همین شکل می‌توان w_i را تا ابتدای دنباله دوم جلو آورد. بنابراین می‌توان فرض کرد هر دو دنباله $(v_1, v_2 \dots, v_n)$ و $(w_1, w_2 \dots, w_m)$ رأس شروع یکسانی دارند. حال این رأس را کنار بگذارید و بقیه دنباله را در نظر بگیرید. مشابه استدلال بالا می‌توان رأس بعدی را هم یکی کرد. با ادامه این روند می‌توانیم ببینیم در انتها همه اعضای آن‌ها یکی می‌شوند. یعنی اعضای دو دنباله جایگشتی از یکدیگر هستند. □

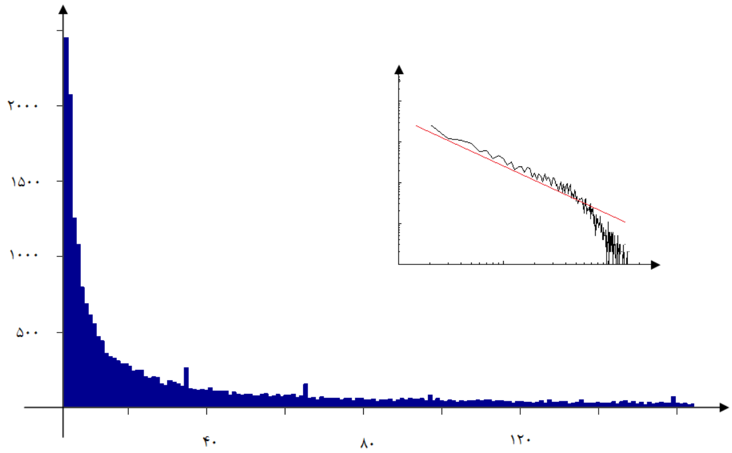
بنابراین بدون ابهام می‌توانیم یک تپه شنی را به تپه پایداری تبدیل کنیم.

تعریف ۴. *پایدار شده‌ی یک تپه شنی، تپه‌ای است که از اعمال تمام فروریزش‌های ممکن بدست آمده است.*

تا به این جا پیش فرض ما این بود گراف G تعداد متناهی رأس و یال داشته باشد. اما این داستان برای گراف‌های نامتناهی هم برقرار است. در این گراف‌ها درجه هر رأس متناهی است ولی تعداد کل یال‌ها یا رأس‌ها ممکن است نامتناهی باشد. بنابراین فرض کنید G گرافی نامتناهی رأسی باشد و به جز متناهی رأس، اعداد مابقی رئوس صفر باشد. در این صورت تپه پایدار نهایی



الف



ب

شکل ۳: الف) ایجاد یک تپه شنی. ب) پایین: نمودار پراکندگی فروریزش‌ها با افزودن تصادفی یک شن، بالا: نمودار لگاریتمی

بدون ابهام تعریف می‌شود. نکته این است که اگر رأسی درگیر فروریزش‌ها شود یعنی یا خودش فروریزش کند یا همسایگانش، همیشه عددش ناصفر خواهد ماند. در نتیجه به علت متناهی بودن مجموع اعداد رئوس، رأس‌های بسیار دور نمی‌توانند در فروریزش‌ها درگیر شوند و مساله به همان حالت متناهی برمی‌گردد. توجه کنید که در حالت نامتناهی حتی نیازی به معرفی رأس چاه نیست و همیشه بعد از تعدادی فروریزش به حالت پایدار می‌رسیم.

در انتهای این بخش مثالی از تپه‌های شنی پایدار شده می‌زنیم. فرض کنید $G = \mathbb{Z}^۲$، یعنی گرافی با رئوس زوج اعداد صحیح که هر رأسی به چهار رأس مجاورش متصل است. G گرافی نامتناهی است و در رأس $(۰, ۰)$ عدد $N = ۵۱۲۰۰$ و مابقی رئوس صفر می‌گذاریم. پایدارشده این تپه در شکل ۲ رسم شده است. جالب است بدانید که برای رسیدن به این تپه ۱۴۰۸۳۴۷۵ فروریزش رخ داده است.

تمرین۱: فرض کنید $G = K_{n+۱}$. یعنی G گراف کامل $n + ۱$ رأسی باشد. یک رأس دلخواه آن را چاه قرار دهید و روی رئوس دیگر عدد m که از n بزرگتر است قرار دهید. نشان دهید در پایدار شده این تپه اعداد تمام رئوس برابر n خواهد بود.

۲ انگیزه‌های فیزیکی

تپه‌های شنی در سال ۱۹۸۷ توسط سه فیزیکدان مطرح شد [۱] که تشابه‌ای با رفتار یک تپه کوچک شنی دارد. هنگامی که در ناحیه‌ای مسطح شن ریخته می‌شود (شکل ؟؟ الف) به تدریج تپه‌ای شکل می‌گیرد و اگر در ناحیه‌ای ارتفاع شن بیش از حدی شود، آن قسمت در اثر گرانش فرو می‌ریزند و ممکن است قسمتی از آن از ناحیه خارج شود. (که معادل فروریزش به چاه است.) این مدلسازی چندان واقعی نیست و در تجربه تنها تا حدی برای دانه‌های برنج دقت دارد ولی از جهات دیگری در فیزیک نظری اهمیت دارد که در این بخش توضیح می‌دهیم. فرض کنید ناحیه‌ی مسطح که شن‌های در آن فرو می‌ریزند مربع شکل است. توصیف ریاضی این ناحیه گرافی است که شبکه زیر برای یک L طبیعی می‌سازد:

$$L \times L := \{(i,j) | i,j \in \mathbb{Z}, ۰ \leq i.j \leq L\} \subset \mathbb{Z}^۲$$

رئوس داخل شبکه درجه چهار و رئوس مرزی درجه سه و یا دو دارند. یک رأس دیگر به عنوان چاه به این شبکه اضافه می‌کنیم و آن را به تمام رئوس مرزی وصل کنیم. اگر به تصادف شن‌ها در ناحیه ریخته شوند باید در هر مرحله به تصادف و با احتمال یکسان رأسی را از گراف بالا انتخاب کنیم و عدد آن را یک واحد افزایش دهیم و صبر کنیم تا تپه شنی حاصل پایدار شود. رفتارهای متفاوتی از این مدل را می‌توانیم بررسی کنیم. مثلاً تعداد رئوس‌ای که در هر مرحله فروریزش می‌کنند را می‌توانیم بشماریم. گاهی اوقات با افزایش یک شن هیچ فروریزشی رخ نمی‌دهد ولی گاهی این عمل باعث سلسله فروریزش‌های بعدی می‌شود. برای بررسی آن درصد حالاتی ۱، ۲ و ... فروریزش رخ می‌دهد را محاسبه می‌کنیم. در نمودار **۳** قسمت (ب)، L را برابر ۲۰ گرفتیم و ۵۰۰۰۰ بار به تصادف اعداد رئوس را افزایش دادیم و تعداد فروریزش‌ها را در سطر و پراکندگی آن را در ستون نمایش دادیم. مشاهده می‌کنیم که این نمودار شبیه نمودار هموگرافیک است. در فیزیک مرسوم است که این توابع را در صفحه لگاریتمی رسم کنند. زیرا اگر ضابطه تابع $y = \dfrac{c}{x^\alpha}$ باشد، با لگاریتم گرفتن به شکل $\mathtt{log}(y) = -\alpha\mathtt{log}(x) + \mathtt{log}(c)$ در خواهد آمد که نمودار یک خط راست است. در بالای شکل**؟؟** نمودار لگاریتمی آن و خط راست نزدیک به آن را با قرمز رسم کردیم. همین کار را برای متغیرهای دیگر می‌توانیم انجام دهیم: تعداد رأسهایی که فروریزش می‌کنند، قطر ناحیه‌ای از گراف که فروریزش‌ها رخ می‌دهند، تعداد شن‌هایی که خارج می‌شود و ... نکته جالب این است که تمام نمودارهایی که رسم می‌کنیم مشابه بالا هستند. این پدیده در فیزیک به وضعیت بحرانی [۲] تعبیر می‌شود. (برای آشنایی مقدماتی نگاه کنید به [۴]) این مدل از آن جهت اهمیت دارد که بدون داشتن هیچ عامل خارجی مانند دما، مغناطش و ... با دینامیک خود به وضعیت بحرانی می‌رود.

۳ تپه‌های بازگشتی

فرض کنید بارشی از شن داشته باشیم یعنی هر مرحله به تصادف به رأسی درگراف شنی اضافه می‌شود. اگر بارش تا ابد ادامه داشته باشد آیا تمام تپه‌های شنی پایدار می‌توانند به وجود آیند؟ جواب این سوال منفی است. مثلاً به محض اضافه شدن شن به گراف دیگر هیچ‌گاه به تپه ای که تمام ریوی آن صفر است نمی‌رسیم. در این بخش می‌خواهیم به این سوال جواب دهیم.
فرض کنید C مجموعه تمام تپه‌های پایدار در گراف متناهی G با رأس چاه s باشد. برای هر رأس غیر چاه $v \in V(G)$ و هر تپه‌ی پایدار $c \in C$، $a_v(c)$ تپه‌ی پایداری است که از اضافه کردن یک واحد به رأس v و پایدار کردن آن حاصل می‌شود. در واقع a_v نگاشتی از تپه‌های پایدار به خودش است. c و v را ثابت بگیرید و دنباله $\dots a_v(c), a_v^۲(c), a_v^۳(c)$ را در نظر بگیرید. (a_v^n به بیان ریاضی یعنی ترکیب n بار تابع a_v با خودش و به بیان فیزیکی عملیاتی است که از اضافه کردن n شن به رأس v و پایدار کردن آن تپه بدست می‌آید.) از آنجا که این دنباله‌ی از تپه‌های پایدار است و تعداد این تپه‌ها متناهی است، دو عضو از آن باید یکی باشد. مثلاً فرض کنید برای اعداد طبیعی $n \neq m$ داشته باشیم: $a_v^n(c) = a_v^m(c)$. با a_v گرفتن متوالی از این تساوی نتیجه می‌شود دنباله اول از جایی به بعد متناوب است. به بیان دیگر با شروع از تپه c و افزودن یک واحد به رأس v از جایی به بعد وارد یک دور از تپه‌های پایدار خواهیم شد. با عوض کردن v این دنباله را برای cهای متفاوتی می‌توانیم بسازیم و به دورهای متفاوتی برسیم.

تعریف ۵. *به مجموعه تپه‌هایی که برای هر v در یکی از دورهای بالا باشد بازگشتی و بقیه تپه‌ها را گذرا می‌نامیم. به عبارت دیگر یک تپه مانند c بازگشتی است اگر وفقط اگر برای هر رأس غیر چاه v، عدد طبیعی $n > ۱$ وجود داشته باشد که $a_v^n(c) = c$*

[۲] مانند وضعیتی که در نزدیکی دمای صفر برای آب رخ می‌دهد. آنجا کم و زیاد شدن دما باعث تغییر وضع از جامد به مایع می‌شود

قضیه ۶. *توابع a_v جابجایی هستند یعنی برای هر دو رأس v,w و تپه c،* $a_v(a_w(c)) = a_w(a_v(c))$

اثبات. جابجایی بودن این توابع معادل این است که بگوییم اگر در تپه c اول به رأس v یک واحد اضافه کنیم و بعد از پایدارسازی به رأس w یک واحد اضافه کنیم، به تپه‌ای می‌رسیم که مشابه آن ولی با جابه‌جا کردن رأس w و v بدست آمده است. در واقع اگر به اثبات قضیه ۲ برگردیم متوجه می‌شویم که در پایان هر دو این مراحل به تپه‌ای می‌رسیم که از پایدارشدن تپه c با افزایش یک واحدی اعداد رئوس v و w حاصل می‌شود و نتیجه نهایی هر ترتیبی از اضافه‌کردن شن‌ها یکی است. $\square$

به تپه‌های بازگشتی برمی‌گردیم. می‌خواهیم نشان دهیم اگر c تپه‌ای بازگشتی باشد و v رأس دلخواه غیر چاهی باشد، $a_v(c)$ هم بازگشتی خواهد بود. فرض کنید w رأسی دلخواه باشد. از آنجا که c بازگشتی است برای یک عدد طبیعی n بزرگتر از یک:

$$a_w^n(c) = c$$

a_v را روی طرفین اثر می‌دهیم:

$$a_v(a_w^n(c)) = a_v(c)$$

اما چون a_v و a_w جابه‌جا می‌شوند سمت چپ عبارت بالا برابر $a_w^n(a_v(c))$ است و در نتیجه:

$$a_w^n(a_v(c)) = a_v(c)$$

یعنی $a_w(c)$ هم برای رأس w تپه‌ای بازگشتی است. از آنجا که استدلال بالا برای هر رأس w ای کار می‌کند نتیجه می‌گیریم $a_w(c)$ تپه‌ای بازگشتی است. این نشان می‌دهد نگاشت‌های a_v تپه‌های بازگشتی را به خودشان می‌نگارند.

قضیه ۷. *نگاشت‌های a_v روی تپه‌های بازگشتی یک به یک و پوشا هستند.*

اثبات. پوشا بودن کمی ساده‌تر است. فرض کنید c یک تپه بازگشتی باشد و w رأسی غیر چاه. می‌دانیم عدد طبیعی $n > ۱$ وجود دارد که:

$$a_w^n(c) = c$$

و در نتیجه $a_w(a_w^{n-۱}(c)) = c$ یعنی تصویر $a_w^{n-۱}(c)$ (که تپه‌ای بازپشتی است) توسط a_w برابر c است. در نتیجه a_w پوشاست.

برای اثبات یک به یک بودن فرض کنید:

$$a_v(c_۱) = a_v(c_۲)$$

از آن‌جا که $c_۱$ و $c_۲$ تپه‌هایی بازگشتی‌اند، اعداد $n_۱$ و $n_۲$ وجود دارند که:

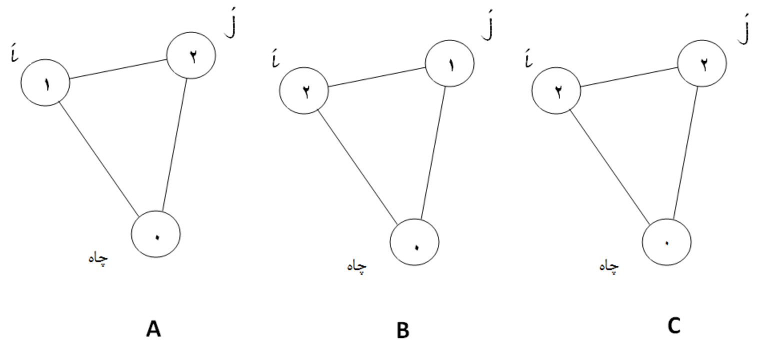
$$a_v^{n_۱}(c_۱) = c_۱, \quad a_v^{n_۲}(c_۲) = c_۲$$

$n_۱$ و $n_۲$ را کوچکترین اعداد با این خاصیت فوق بگیرید.

اگر $a_v^{n_۱}$ را به طرفین $a_v(c_۱) = a_v(c_۲)$ اثر دهیم داریم:

$$a_v^{n_۱+۱}(c_۱) = a_v^{n_۱+۱}(c_۲) \quad \Rightarrow \quad a_v(c_۱) = a_v(c_۲) = a_v^{n_۱+۱}(c_۲)$$

تساوی آخر نتیجه می‌دهد تناوب $c_۲$ از $n_۱$ کمتر یا مساوی است. یعنی $n_۲ \le n_۱$. مشابهاً بدست می‌آید: $n_۱ \le n_۲$ و در نتیجه $n_۱ = n_۲$. در نهایت $a_v^{n_۱-۱}$ را به طرفین $a_v(c_۱) = a_v(c_۲)$ اثر دهیم تا بدست آید $c_۱ = c_۲$. پس a_v یک به یک است.
$\square$



شکل ۴: تپه‌های بازگشتی گراف مثلثی

تمرین۲: برای گراف مثلثی نشان دهید از بین ۹ تپه شتی موجود تنها ۳ تپه بازگشتی هستند. این تپه‌ها در در شکل ۴ رسم کردیم.

۴ ساختار گروهی

مشابه اعداد صحیح که می‌توان دو عضو آن را با هم جمع کرد تا عدد صحیحی دیگری بدست آید، دو تپه پایدار را می‌توان با هم جمع کرد تا تپه پایدار دیگری بدست آید. برای جمع آن‌ها اعداد دو تپه را برای هر رأس با هم جمع کنیم و بعد تپه حاصل را پایدار سازیم.
اما آیا می‌توان دو تپه را از هم تفریق کرد؟ برای جواب دادن به این سوال به اعداد صحیحی بازگردید. می‌دانیم اگر a, b, c سه عدد صحیح باشند که:

$$a + b = a + c$$

آنگاه $b = c$. این خاصیت حذفی اعداد صحیح است که باعث خوش تعریفی تفریق می‌شود. زیرا برای بدست آوردن $b - c$ به ما اطمینان می‌دهد که تنها یک a وجود دارد که $b = a + c$ و در نتیجه تعریف می‌کنیم $a = b - c$.
آیا خاصیت حذفی در مورد تپه‌های پایدار برقرار است؟ در بیشتر گراف‌ها می‌توان مثالی زد که این خاصیت نقض شود. اما از بخت خوش اگر توجه خود را محدود به تپه‌های بازگشتی کنیم خاصیت حذفی برقرار خواهد شد. در این بخش این موضوع را ثابت می‌کنیم و خواهید دید که ساختار هیجان انگیزی در تپه‌های بازگشتی وجود دارد.
ابتدا توجه کنید که جمع دو تپه بازگشتی، تپه‌ای بازگشتی است. زیرا این کار معادل این است که شن‌هایی به تپه پایدار اول اضافه کنیم و همانطور که در بخش قبل دیدیم این کار معادل اثر دادن تعدادی از توابع a_v ها است. در قضیه ۶ دیدیم که تصویر تمام این توابع تپه‌های بازگشتی است و در نتیجه بعد از اثر دادن تمام این توابع تپه نهایی هم بازگشتی خواهد بود. این برهان به ما پیشنهاد می‌کند که یک تپه بازگشتی را می‌توانیم برحسب ترکیبی از a_v ها بنویسیم. بگذارید برگردیم به تمرین ۲ بخش قبل و با این کار تپه‌های بازگشتی را به شکل زیر بنویسیم:

$$A = a_i a_j^{۲}, \quad B = a_i^{۲} a_j, \quad C = a_i^{۲} a_j^{۲}$$

(البته دقیق‌تر است که بنویسیم $A = a_i(a_j^{۲}(\phi))$ که ϕ تپه‌ای است که اعداد همه رئوس صفر آن است ولی فعلاً آن را از قلم

می‌اندازیم.) در نتیجه برای جمع دوبدوی آن‌ها داریم:

$$
\begin{aligned}
&A+B = a_i a_j^2(a_i^2 a_j) = a_i^3 a_j^3 = a_i a_j^4 = a_i^2 a_j^2 = C,\\
&B+C = a_i^4 a_j^3 = a_i^2 a_j^4 = a_i^3 a_j^2 = a_i a_j^3 = a_i^2 a_j = B\\
&A+C = a_i^3 a_j^4 = \cdots = A\\
&A+A = B, \quad B+B = A, \quad C+C = C
\end{aligned}
$$

اگر با دقت به این مجموع‌ها نگاه بیندازید کشف خواهید کرد که اگر A، B و C را با مجموعه اعدادی که به پیمانه ۳ به ترتیب ۱، ۲ و ۰ هستند تناظر کنیم، تمام جمع‌های بالا برقرار است.

به سوال اول برگردیم: چگونه می‌توان دو تپه بازگشتی را از هم کم کرد؟ برای این کار کافی است وارون یک تپه را معرفی کنیم. زیرا تفاضل دو عضو برابر جمع اول با وارون عدد دوم است. برای تعریف وارون دوباره به قضیه ۶ نگاهی بیندازید. توابع a_v ها روی تپه‌های بازگشتی وارون‌پذیرند و می‌توانیم از a_v^{-1} ها را تعریف کنیم. حال اگر تپه $x = a_{v_1} a_{v_2} \ldots a_{v_n}(\phi)$ بازگشتی باشد، $a_{v_1}^{-1}(x)$ هم بازگشتی است. با استقرا $a_{v_1}^{-1} a_{v_2}^{-1} \ldots a_{v_n}^{-1}(x)$ هم بازگشتی است و آن را به عنوان وارون این عضو تعریف می‌کنیم. مثلاً می‌توان نشان داد در مثال قبل وارون A، B و C به ترتیب B، A و C است.

در نتیجه در مجموعه‌های تپه‌های بازگشتی بدون هیچ نیازی به پرانتزگذاری می‌توانیم جمع و تفاضل تعدادی از آن‌ها را تعریف کنیم. از نظر ریاضی به چنین ساختاری یک گروه آبلی[۳] می‌گویند. آیا مجموعه دیگری می‌شناسیم که این چنین باشد؟ ساده‌ترین مثال اعداد صحیح با جمع و تفریق معمولی است. همانطور که در مثال بالا دیدیم مجموعه اعدادی که به پیمانه عددی مقدار خاصی باشند هم اینگونه‌اند. در بالا این عدد ۳ بود که دیدیم معادل شد با مجموعه ۳ عضوی $3k$، $3k+1$ و $3k+2$. مرسوم است اگر به پیمانه n در نظر بگیریم این مجموعه را با $\mathbb{Z}_n$ نشان دهیم. مثال دیگر $\mathbb{Z}^n$ یعنی بردارهای n تایی با مولفه‌های صحیح است. هر دو بردار را می‌توان جمع یا تفاضل برداری کرد. با ترکیب کردن دو مثال آخر $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ مجموعه k تایی‌هایی است که مولفه‌های آن به پیمانه k عدد مختلف در نظر گرفته شوند و قضیه جالبی در گروه‌ها آبلی وجود دارد که ثابت می‌کند هرگروه آبلی متناهی نمایشی به این صورت دارد[۴]. این قضیه شناخت گروه تپه‌های بازگشتی را به بدست آوردن اعداد n_1 تا n_k تبدیل می‌کند. در هر گروه آبلی عضو صفری وجود دارد که جمع هر عضوی با آن برابر همان عضو است. مثلاً در گراف مثلثی تپه C صفر بود. پیدا کردن این عضو در گراف دلخواه کاری دشوار است. در شکل ۵ عضو صفر شبکه ۵۲۲ × ۵۲۲ رسم شده‌است.

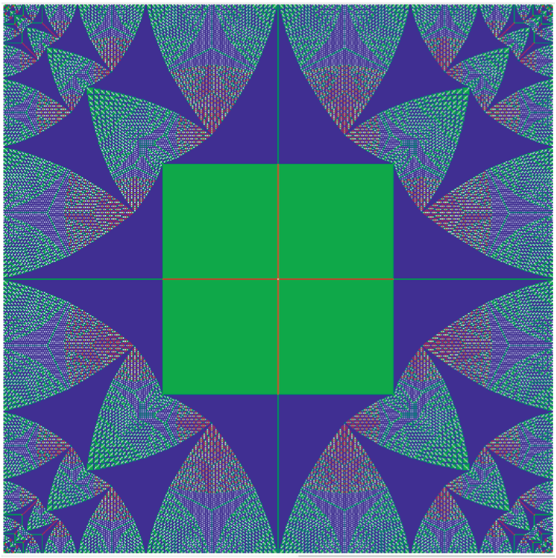
اگر بیاد آورید در ابتدا رأسی از گراف را به عنوان چاه انتخاب کردیم و بعد گروه تپه‌های بازگشتی را بدست آوردیم. سوال اینجاست که آیا انتخاب رأس چاه این گروه را عوض می‌کند. جواب این سوال هم دوباره به شکل معجزه آسایی منفی است. یعنی این گروه مستقل از انتخاب رأس چاه است. قبل از بیان و اثبات این قضیه، به نحوه نوشتن یک تپه برحسب a_vها برمی‌گردیم. نکته ضریفی در این نمایش وجود دارد: هر یک از a_vها یک نگاشت است بنابراین ترکیب آن‌ها نیز یک نگاشت روی تپه‌های شنی است. ولی ما این نگاشت را با تپه‌ای یکسان می‌گیریم. از این رو جمع دو تپه، دو ترجمه دارد. یکی همان است که در اول بخش گفتیم، یعنی جمع رأس به رأس آن‌ها و پایدار کردن تپه حاصل است. دیگری به معنای ترکیب دو تابع است که در محاسبات مربوط به گروه مثلثی نوشتیم. این دو بیان‌های مختلفی از یک ساختار ریاضی یکسان هستند. مثلاً بیان تابعی در گراف مثلثی می‌توانیم بنویسیم:

$$a_i^3 = a_i a_j, \quad a_j^3 = a_j a_i$$

به این معنا که اضافه کردن ۳ شن به یک رأس معادل اضافه کردن یک شن به آن و یک شن به رأس دیگر است و با محاسبات

[۳] علت اطلاق کلمه گروه این است می‌توانند روی هم اثر بگذارند و مانند یک گروه انسانی رفتار جمعی آن‌ها را مورد بررسی قرار داد. کلمه آبلی نیز از نام هنریک آبل Nils Henric Abel ریاضیدان نامدار نروژی که کارهای درخشانی در رابطه با این مجموعه‌ها کرده گرفته شده است.

[۴] fundamental theorem of finite abelian groups



شکل ۵: عضو صفر در یک شبکه بزرگ، نقاط آبی، سبز، قرمز و نارنجی به ترتیب نشان دهنده ۴، ۳، ۲ و ۱ شن هستند.

سررأستی روی تپه‌های بازگشتی که این دو وارون‌پذیرند به تساوی:

$$a_i^{-۱} = a_i a_j^{۲}$$

برسیم. در حالت کلی اگر رأسی مانند w را در گراف در نظر بگیریم که به رئوس $v_۱$ تا v_m وصل است، می‌توانیم بنویسیم:

$$a_w^m = a_{v_۱} a_{v_۲} \dots a_{v_m}$$

این‌ها تنها روابطی است که روی نگاشت‌های a_v ها داریم. تعداد این روابط و تعداد a_v ها برابر تعداد رئوس $|V(G)| - ۱$ است. البته این روابط از هم مستقل نیست‌اند. اگر تمام معادلات را برای تمام w ها در هم ضرب کنید به رابطه بدیهی خواهید رسید.

یک بار دیگر به تعریف تپه‌های بازگشتی بازگردید واضح نیست که چرا حداقل یک تپه بازگشتی در یک گراف وجود دارد. می‌خواهیم نشان دهیم تعریف را می‌توان ساده کرد و به جای تناوبی بودن برای تمام رئوس، تناوبی بودن برای حداقل یک رأس را جایگزین کرد. یعنی اگر برای تپه c یک رأس w وجود داشته باشد که $a_w^n(c) = c$ آنگاه c خود به خود برای رئوس دیگر نیز تناوبی می‌شود و در نتیجه تپه‌ای بازگشتی است. رأس دیگری مانند u در نظر بگیرید. به علت متناهی بودن تپه‌های شنی می‌دانیم اعداد N و p وجود دارند که:

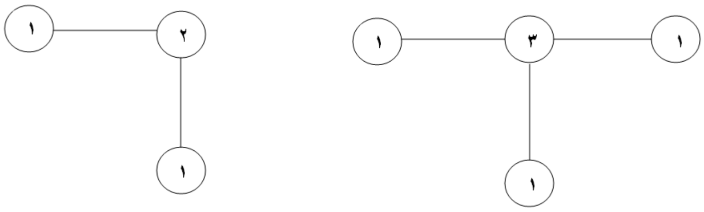
$$a_u^{N+p} = a_u^N$$

علاوه بر این در بالا به رابطه زیر رسیدیم:

$$a_w^m = a_{v_۱} a_{v_۲} \dots a_{v_m}$$

که $v_۱$ تا v_m همسایه‌های راس w است. اگر این رابطه را با خودش بارها و بارها ترکیب کنیم و رابطه مشابه را برای رئوس دیگر بنویسیم a_u ظاهر خواهد شد. (زیرا u به w وصل است.) یعنی عدد Mای است که:

$$a_w^{Mn} = a_u^N (a_{x_۱} a_{x_۲} \dots a_{x_k})$$



شکل ۶: زیر گراف‌هایی که در یک تپه بازگشتی وجود ندارد.

که x_1 تا x_k دنباله‌ای از رئوس هستند. (ممکن است بعضی با u برابر باشند.) داریم:

$$a_u^p(c) = a_u^p(a_w^{Mn}(c)) = a_u^p(a_u^N a_{x_1} a_{x_2} \dots a_{x_k}(c)) = a_u^{N+p}(a_{x_1} a_{x_2} \dots a_{x_k}(c)) =$$
$$a_u^N(a_{x_1} a_{x_2} \dots a_{x_k})(c) = a_w^{Mn}(c) = c$$

و بنابراین c برای u هم تناوبی است. چون حداقل یک تپه در تناوب یک رأس است می‌توانیم نتیجه گرفت که حداقل یک تپه بازگشتی وجود دارد. علاوه بر این چون با افزودن شن این تپه همچنان پایدار می‌ماند، نتیجه می‌گیریم تپه‌ای که هر رأس آن دقیقاً به اندازه درجه‌اش شن دارد بازگشتی است.

تمرین ۳: نشان دهید با انتخاب رأسهای مختلف گراف به عنوان چاه به گروه آبلی یکسانی می‌رسیم. این موضوع نشان می‌دهد هر چند تپه‌های بازگشتی با تعویض چاه تغییر می‌کنند اما گروه تپه‌های بازگشتی ثابت است و تنها به ساختار گراف بستگی دارد.

تمرین۴: نشان دهید گروه بازگشتی K_n یعنی گراف کامل n رأسی برابر $\mathbb{Z}_n^{n-2}$ و گراف $K_{m,n}$ یعنی گراف کامل دو بخشی m و n رأسی برابر $\mathbb{Z}_m^{n-2} \times \mathbb{Z}_n^{m-2} \times \mathbb{Z}_{mn}$ است.

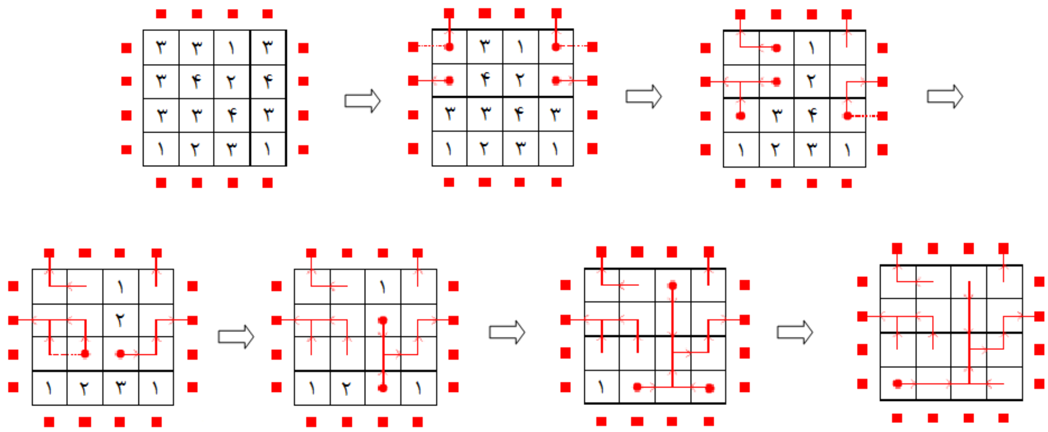
تمرین۵: الگورریتمی کامپیوتری برای محاسبه عضو صفر گروه تپه‌های بازگشتی بدست آورید.

۵ ارتباط با درخت فراگیر

چگونه از روی اعداد یک تپه شنی بفهمیم بازگشتی است یا گذرا؟ احتمالاً متوجه شده‌اید که بعضی حالات در تپه‌های بازگشتی نمی‌تواند رخ دهد. ساده ترین حالت وجود رأسی با عدد صفر است. اگر تپه‌ای با عدد صفر در یک رأس بازگشتی باشد با افزودن عدد مناسبی به این رأس و پایدار کردن آن باید دوباره به آن برگردیم. اما به محض این‌که عدد رأسی ناصفر شود دیگر هیچ‌گاه طی فروریزش‌ها نمی‌تواند صفر شود و بنابراین این تپه‌ها گذرا هستند. حالت دیگری که یک تپه بازگشتی نمی‌تواند داشته باشد، وجود دو رأس مجاور با اعداد یک است. اگر چنین تپه‌ای بازگستی باشد دوباره با افزودن عددی مناسبی به یکی از دو رأس و پایدارکردن تپه حاصل باید به آن برگردیم. آخرین فروریزشی که این دو رأس با درجه یک تشکیل می‌شوند را در نظر بگیرید. اگر یکی از دو رأس فروریزش کرده باشد آنگاه عدد رأس دیگر قبل از این اتفاق باید صفر باشد که دیدیم امکان ندارد. اگر رأسی غیر از این دو فروریزش کرده باشد نیز باید عدد حداقل یکی از دو رأس صفر باشد که بازهم امکان ندارد. بنابراین دو رأس مجاور با عدد یک نمی‌تواند در تپه بازگشتی وجود داشته باشد. همینطور می‌توانید نشان دهید هیچ یک از زیر گراف[۵]های شکل ۶ در یک تپه بازگشتی وجود ندارد.

قضیه زیر تعمیم این حالات غیر مجاز در تپه‌های بازگشتی است:

[۵] یعنی زیرمجموعه از رئوس به همراه زیر مجموع از یال‌های بین این رئوس



شکل ۷: گراف مشبکه ۱۶ رأسی با یک رأس چاه در خارج. در اینجا برای راحتی رأس چاه را کنار هر ضلع با مربع قرمز نشان دادیم. دایره‌های قرمز هم رئوسی هستند که در هر مرحله می‌سوزند. بعد از ۶ مرحله در پایان به زیر درختی رسیدیم.

قضیه ۸. *اگر برای تپه c زیرگراف F از G وجود داشته باشد که عدد هر رأس در F از درجه‌اش در F کمتر یا مساوی باشد، آنگاه c بازگشتی نیست.*

اثبات. روی مجموع اعداد رئوس به علاوه تعداد رئوس F استقرا بزنید و مشابه استدلال بالا آخرین باری که اعداد F تشکیل می‌شوند را در نظر بگیرید. □

نتیجه: در یک تپه بازگشتی باید حداقل عدد یکی از رئوس مجاور چاه برابر درجه‌اش باشد. زیر در غیر این ضورت می‌توان F را برابر کل G گرفت.

عکس قضیه بالا هم درست است منتها اثبات آن کمی مشکل است. در این‌جا از اثبات آن صرف نظر می‌کنیم ولی با استفاده از آن الگوریتمی برای تشخیص بازگشتی بودن یک تپه معرفی می‌کنیم. این الگوریتم نشان می‌دهد تناظری یک به یک بین تعداد تپه‌های بازگشتی و زیردرخت‌های فراگیر گراف وجود دارد.

الگوریتم در تعدادی مرحله اجرا می‌شود و در هر مرحله هر رأس می‌تواند یکی از دو حالت سالم یا سوخته شده داشته باشد. به غیر از رأس چاه که سوخته است همه رئوس در ابتدا سالم هستند و هرگاه رأسی سوخت، برای همیشه سوخته خواهند ماند. حال در مرحله اول رئوسی را پیدا می‌کنیم که عددشان از درجه‌شان کمتر یا مساوی باشد و آن‌ها را از سالم به سوخته تبدیل می‌کنیم. مثلاً در گراف شبکه‌ای شکل ۷ که ۱۶ رأس غیرچاه دارد، در مرحله اول چهار رأس می‌سوزند که آن‌ها را با دایره قرمز نشان دادیم. در مرحله بعد به گراف رأسهای سالم نگاه می‌کنیم و تمام آن‌هایی که عددشان از درجه‌شان در این گراف کمتر یا مساوی است را می‌سوزانیم. به همین ترتیب در هر مرحله تعدادی از رئوس می‌سوزند. اگر در پایان مجموعه ای از رئوس باقی ماند تپه بازگشتی نیست. زیرا این مجموعه را می‌توان به جای F در قضیه ۸ قرار داد. اگر رأسی باقی نماند تپه حتماً بازگشتی است. (ثابت کنید!) در پایان برای یافتن تناظر با زیر درخت‌های فراگیر از ابتدا ترتیبی به رئوس دهید. سپس در هر مرحله که رأسی می‌سوزد آن را به کوچکترین ترتیب در بین رئوس همسایه‌اش که در مرحله قبل سوخته‌اند وصل کنید.

تمرین۶: به نظر شما با این تناظر بین تپه‌های بازگشتی و زیر درخت‌های فراگیر، گروه آن‌ها چگونه خواهد شد؟ مفهوم جمع در زیرگراف‌های فراگیر چیست؟ به تمرین ۴ نگاهی دوباره بیاندازید.

شکل ۸: تصویر ماهواره‌ای یک کویر خشک

۶ مسایل مرتبط

مسایل و نکات جالبی در تپه‌های شنی وجود دارد. به عنوان مثال فرض کنید اجازه دهیم در طول فروریزش‌ها اعداد رئوس منفی نیز بشوند. آیا امکان دارد تعداد فروریزش‌ها هر رأس با این کار کمتر شود؟ نشان داده شده که این کار امکان پذیر نیست. یعنی تعداد فروریزش‌هایی که یک تپه انجام می‌دهد کمترین تعداد ممکن (چه برای کل گراف و چه برای یک رأس) است. به این حقیقت اصل کمترین عمل[۶] می‌گویند. دو پدیده مهم که در تپه‌های شنی هنوز اثبات نشده‌اند ناوردایی مقیاس و کاهش بعد است. برای درک ناوردایی مقیاس به شکل‌های ۲ و ۵ دوباره نگاه بیاندازید. به نظر می‌آید با بزرگ شدن گراف شکل حاصل به یک شکل حدی نزدیک می‌شود. البته این که به چه معنا شکل حدی وجود دارد نیاز به صورت بندی دقیق ریاضی دارد اما هر تلاشی در این زمینه ارزشمند است. کاهش بعد به این معنا است که با افزایش بعد گراف هم بسیاری از پدیده‌ها مشابه‌اند. مثلاً می‌توان به جای گراف $\mathbb{Z}^۲$ با گراف $\mathbb{Z}^۳$ کار کنیم و یک مقطع دو بعدی آن را مورد مطالعه قرار دهیم. تعمیم‌های بسیاری از این مدل وجود دارد. مثلاً برای واقعی کردن آن فرض می‌کنند فروریزش‌ها وقتی رخ می‌دهند که اختلاف بین دو رأس مجاور از مقداری بیشتر شود. کار کردن با این مدل کمی مشکل‌تر است زیرا نگاشت‌های a_v که در بالا اشاره کردیم دیگر در این مدل جابجایی نیست‌اند. در مدل‌هایی فرض می‌کنند اعداد یک رأس و مقدار فروریزش‌ها مقادیری حقیقی و مثبت باشند. این مدل هم تفاوت‌های جدی با مدل بالا دارد ولی برای حل کردن مسایل حدی مناسب است و ارتباطات جالبی با معادلات دیفرانسل پاره‌ای دارد.

تمرین۷: تصویر ماهواره‌ای شکل ۸ از خشک ترین کویرها به همراه تپه‌های آن را نشان می‌دهد. چگونه می‌توانیم آن را مدل بندی ریاضی کنیم؟

[۶] Least Action Potential Principle

منابع

[۱] P. Bak; C. Tang; K. Wiesenfeld, "Self-organized criticality: An Explanation of the 1/f Noise." Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 381.

[۲] Dhar, Deepak. "Theoretical Studies of Self-Orgonized Criticality." Physica A 369 (2006) 29–70

[۳] Lionel Levine and James Propp, "What is. . . a sandpile?," Notices Amer. Math. Soc.57 (2010),no. 8, 976979

[۴] http://www.scholarpedia.org/article/Critical_Phenomena:_field_theoretical_approach

[۵] F.Redige. "Mathematical aspect of Abelian Sandpile Model." Les Houches lecture notes, 2005

[۶] Hoore, Masoud; Moghimi-Araghi, Saman, "Critical behavior of a small-world sandpile model." Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Volume 46, Issue 19, article id. 195001 (2013)