دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

مدل همرزلی و بزرگترین زیردنباله صعودی جایگشت تصادفی

نگارش
روزبه فرهودی

استاد راهنما
دکتر کسری علیشاهی

دی ۱۳۸۹

به نام او

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان: مدل همرزلی و بزرگترین زیردنباله صعودی جایگشت تصادفی
نگارش: روزبه فرهودی

کمیته داوران

استاد راهنما: دکتر کسری علیشاهی امضاء: . . . .

ممتحن داخلی: دکتر بیژن زنگنه امضاء: . . . .

داور خارجی: دکتر مهرداد شهشهانی امضاء: . . . .

تاریخ: . . . .

قدردانی

از تمام زحماتی دوست و استاد راهنمای عزیزم کسری علیشاهی برایم کشیده‌اند تشکر می‌کنم و این پایان‌نامه را به پدر و مادرم که همواره پشتیبانم هستند تقدیم می‌کنم.

مدل همرزلی و بزرگترین زیردنباله صعودی جایگشت تصادفی

چکیده

بررسی رفتارهای حدی پدیده‌های تصادفی، از مسایل مهم رشته احتمالات است. مدلی که در این پایان‌نامه بررسی می‌کنیم بزرگترین زیردنباله صعودی جایگشتی تصادفی است. قدمت این مساله به دهه شصت میلادی می‌رسد و در طول حدود یک دهه حل آن ابزارها و مسایل متنوعی ابداع شد. اخیراً نیز پیشرفت‌های جالبی درباره ارتباط این مساله با مسایل دیگر شناخته شده است که مهمترین آن مساله ماتریس‌های تصادفی است. در این‌جا سعی خواهیم کرد صورت مساله را کامل بیان کنیم و اثبات قدیمی و تا حدی طولانی و اثبات روشن‌گر و متاخری ارایه دهیم.

واژه‌های کلیدی: جایگشت تصادفی، بزرگترین زیردنباله صعودی، مدل همرزلی، نمودار یانگ، نمایش‌های گروه جایگشتی.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

پیش گفتار

بزرگترین زیر دنباله صعودی یک جایگشت به طور میانگین چه اندازه‌ای دارد؟ این مسئله اولین بار توسط اولام در اوایل دهه ۶۰ میلادی طرح شد. او با روش‌های مونت کارلو حدس زد اگر جایگشتی از S_n انتخاب شود، میانگین بزرگترین زیر دنباله صعودی آن رشدی از مرتبه $\sqrt{n}$ دارد.

اولین قدم در سال ۱۹۷۱ توسط همرزلی[1] برداشته شد. او نشان داد این مساله بیانی هندسی دارد و اگر L_n متغیر تصادفی طول بزرگترین زیر دنباله صعودی باشد، $c = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}(L_n)}{\sqrt{n}}$ وجود دارد هرچند که مقدار آن نامعلوم بود. تلاش‌ها برای محاسبه آن ادامه یافت. محاسبات عددی پیش‌بینی می‌کرد c برابر ۲ است و سرانجام ورشیک و کروو در سال ۱۹۷۹ اثبات دقیقی برای آن یافتند. کار آن‌ها بر اساس تناظری بین جایگشت‌های تصادفی و نمایش‌های گروه S_n است. در سال ۱۹۹۵ الدوس و دیاکونیس با الهام از ایده همرزلی فرایندی را معرفی کردند که اثبات مقدماتی برای $c = ۲$ ارائه می‌داد. این فرایند امروزه به فرایند همرزلی معروف است. در دهه‌های اخیر این مساله دوباره مورد توجه قرار گرفته است. یکی از دلایل آن تشابه حیرت انگیز رفتار حدی L_n با بزرگترین مقدار ویژه یک ماتریس تصادفی است. در سال ۱۹۹۹ یوهانسون، دایفت و بیک در محاسباتی طاقت‌فرسا نشان دادند $L_n = ۲\sqrt{n} - \mu_\infty n^{۱/۶} + o(n^{۱/۶})$ که μ_∞ مرتبط با توزیعی شناخته شده در ماتریس‌های تصادفی به نام توزیع ترسی- ویدام است.

در فصل اول این پایان نامه به این بیان هندسی و اثبات همرزلی می‌پردازیم و تقریب‌هایی اولیه برای c ارائه می‌دهیم. در فصل دوم به اثبات الدوس و دیاکونیس اختصاص دارد. مطالب این فصل مستقیما از کار آن‌ها برداشته شده است. در فصل پایانی اثبات ورشیک و کروو را بیان می‌کنیم. از آنجا که این اثبات از نظریه نمایش استفاده می‌کند، در ضمیمه این پایان نامه به مروری کوتاه بر این نظریه خواهیم پرداخت.

[1] J.Hammersely

۱. بزرگترین زیر دنباله صعودی جایگشتی تصادفی

۱.۱. ارتباط جایگشت تصادفی و فرایند نقطه‌ای پواسون

چگونه می‌توان جایگشت یکنواختی از بین تمام جایگشت‌ها تولید کرد؟ یک الگوریتم ساده به شرح زیر است:
ابتدا عدد یک را می‌نویسیم. سپس عدد دو را به احتمال برابر سمت چپ یک و یا راست آن قرار می‌دهیم و بنابراین جایگشت حاصل به احتمال برابر (۱،۲) یا (۲،۱) است. در قدم n-ام عدد n را به احتمال برابر سر، ته و یا در یکی از $n-1$ فاصله بین اعضای جایگشت فعلی می‌گذاریم. به وضوح جایگشت نهایی به طور یکنواخت از بین $n!$ جایگشتِ S_n تولید شده است.
روش بالا نه تنها در هر مرحله یک جایگشت تصادفی یکنواخت تولید می‌کند بلکه فرایندی تصادفی روی جایگشت‌ها می‌سازد. در فصل سوم از این نکته در ارتباط با شکل حدی نمودارهای یانگ استفاده خواهیم کرد.
اما در این‌جا الگوریتمی هندسی برای تولید یک جایگشت تصادفی بیان می‌کنیم:
فرض می‌کنیم $\mathcal{N}$ یک فرایند نقطه‌ای پواسون[1] با نرخ ۱ در صفحه و I مربع واحد $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ باشد. تعدادِ نقاط در I متغیر تصادفی پواسونی با نرخ ۱ است. همچنین فرض می‌کنیم ω یک نمونه از این فرایند با شرط حظور n نقطه در آن باشد. نقاط در I را روی هر دو محور x و y تصویر و به شکل صعودی مرتب می‌کنیم: $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ و $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$. بنابراین به ازای یک جایگشت $\sigma \in S_n$نقاط در I به شکل $\{(x_i, y_{\sigma(i)}) | 1 \leq i \leq n\}$ هستند. به علت تقارن فرایند نقطه‌ای پواسون می‌توان دید جایگشت σ همان طور که خواسته شده بود به طور یکنواخت از بین جایگشت‌های S_n انتخاب شده است.
اهمیت این الگوریتم ارتباطش با بزرگترین زیر دنباله‌ی صعودی است. انتخاب یک زیر دنباله‌ی صعودی در σ معادل انتخاب تعدادی نقطه است که پاره‌خط‌های واصل بین هر کدام از آن‌ها شیب مثبت داشته باشد
می‌خواهیم با استفاده از این بیان هندسی احکامی برای طول بزرگترین زیر دنباله صعودی ثابت کنیم.
متغیر تصادفی $L_n(\sigma)$ را طول بزرگترین زیردنباله صعودی $\sigma \in S_n$ می‌گیریم و برای فرایند نقطه‌ای پواسون $\mathcal{N}$ روی کل صفحه، متغیر تصادفی $L^{\nearrow}(x,y)$ را تعداد نقاط روی بزرگترین خط شکسته‌ی با شیب مثبت در ناحیه $[0,x] \times [0,y]$ (بدون شرط روی تعداد نقاط I) قرار می‌دهیم و برای $x \in \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم:

[1] فرایند نقطه‌ای پواسون مدل احتمالاتی برای تولید نقاط تصادفی در صفحه است.این فرایند با این دو شرط به طور یکتا مشخص می‌شود: ۱) تعداد نقاط هر زیر مجموعه بورل از صفحه متغیری پواسون با نرخ مساحت آن است. ۲) تعداد نقاط دو زیر مجموعه مجزا از صفحه مستقل از هم است.

شکل ۱.۱.: طولانی‌ترین خط شکسته‌ی با شیب مثبت

$$g(x) = \mathbb{E}(L^{\nearrow}(x,x))$$

از آن‌جا که در مربع $[0,\sqrt{n}] \times [0,\sqrt{n}]$ به طور میانگین n نقطه وجود دارد انتظار داریم متغیر تصادفی‌های $L^{\nearrow}(\sqrt{n},\sqrt{n})$ و L_n در توزیع نزدیک به یکدیگر باشند. برای ساده‌گی متغیر تصادفی $L^{\nearrow}(\sqrt{x},\sqrt{x})$ را با $L_x^{\nearrow}$ نشان می‌دهیم. فعلا توجه خود را محدود به تابع $g(x)$ می‌کنیم و رفتار حدی آن را وقتی $x \longrightarrow +\infty$ بررسی می‌کنیم و در بخش بعد آن را به L_n تعمیم می‌دهیم.

مشاهده می‌کنیم که با کنار هم قرار دادن یک خط شکسته‌ی با شیب مثبت از $(0,0)$ تا (t,t) و از (t,t) تا $(t+s,t+s)$ یک خط شکسته‌ی با شیب مثبت از $(0,0)$ تا $(t+s,t+s)$ به دست می‌آید. اما توجه کنید که به علت پواسونی بودن فرایند نقطه‌ای، متغیر تصادفیِ بزرگترین خط شکسته با شیب مثبت از نقطه (t,t) تا $(t+s,t+s)$ فرقی با متغیر تصادفی مشابه‌ای که از $(0,0)$ به (s,s) می‌رسد، ندارد. در نتیجه متغیر تصادفی $\tilde{L}^{\nearrow}(s,s)$ هم‌توزیع با $L^{\nearrow}(s,s)$ وجود دارد که:

$$L^{\nearrow}(t,t) + \tilde{L}^{\nearrow}(s,s) \leq L^{\nearrow}(t+s,t+s)$$

و در نتیجه:

$$g(t) + g(s) \leq g(t+s) \qquad (۱.۱)$$

به توابعی که برای هر s و t در رابطه ۱.۱ صدق می‌کنند ابرجمعی می‌گوییم.

لم ۱.۱ (فکت). [۲] فرض کنید تابع $g : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ابرجمعی باشد و $c = \sup_t \frac{g(t)}{t}$. در این صورت:

[۲] Fekete Lemma

$$c = \lim_{t\longrightarrow+\infty}\frac{g(t)}{t}$$

اثبات. $t \in \mathbb{R}^+$ را ثابت بگیرید. برای هر $x \in \mathbb{R}^+$ عدد طبیعی n و عدد حقیقی $0 \leq r < t$ یافت می‌شوند که $x = nt + r$. از زیر جمعی بودن نتیجه می‌شود:

$$ng(t) + g(r) \leq g(x) \tag{۲.۱}$$

در نتیجه:

$$\frac{n}{nt+r}g(t) + \frac{g(r)}{x} \leq \frac{g(x)}{x}$$

و بنابراین با میل دادن x به بینهایت:

$$\frac{g(t)}{t} = \liminf_{n\to+\infty}(\frac{n}{nt+r}g(t) + \frac{g(r)}{x}) \leq \liminf_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$$

از آن‌جا که نامساوی بالا برای هر $t \in \mathbb{R}^+$ برقرار است:

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{g(t)}{t} \leq \liminf_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$$

بنابراین $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ وجود دارد و برابر $c = \sup_t \frac{g(t)}{t}$ است.

□

از لم بالا نتیجه می‌شود $\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathbb{E}(L_x^{\nearrow})}{\sqrt{x}}$ وجود دارد. علاوه بر این با استفاده از لم فکت برای متغیرهای تصادفی [۳] می‌توان نشان داد حد $\frac{L_x^{\nearrow}}{\sqrt{x}}$ تقریبا به ازای هر نمونه از فرایند نقطه‌ای پواسون وجود دارد.

۲.۱. تقریب با فرایند پواسون

تاکنون دیده‌ایم $\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathbb{E}(L_n^{\nearrow})}{\sqrt{n}}$ وجود دارد. در این قسمت نشان می‌دهیم بین دو متغیر تصادفی $L_n^{\nearrow}$ و L_n تفاوت زیادی نیست و می‌توان حکم بالا را برای L_n هم نشان داد.

لم ۲.۱. برای هر k و n طبیعي:

$$\mathbb{P}(L_n \leq k) \leq \mathbb{P}(L_{n-1} \leq k)$$

اثبات. نگاشت $R : S_n \longrightarrow S_{n-1}$ را به این شکل تعریف می‌کنیم که ابتدا هر جایگشت در $\sigma \in S_n$ را با دنباله $[\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)]$ نمایش میدهیم. حال با حذف جمله‌ای که عدد n آمده است به جایگشتی از

S_{n-1} می‌رسیم.
از آنجا که R نگاشتی n به ۱ است، اندازه یکنواخت را ناوردا نگاه می‌دارد. از تعریف این نگاشت می‌توان دید

$$\forall \sigma \in S_n; \quad L_{n-1}(R(\sigma)) \leq L_n(\sigma)$$

که به راحتی لم را نتیجه می‌دهد. □

لم ۳.۱. فرض کنید n عددی طبیعی و به اندازه کافی بزرگ باشد. k را عددی دل‌خواه در فاصله ۱ تا n بگیرید. تعریف می‌کنیم

$$M_n = [n + 4\sqrt{n \log n}]$$

و

$$m_n = [n - 4\sqrt{n \log n}]$$

در این صورت ثابت c مستقل از n و k یافت می‌شود که:

$$\mathbb{P}(L_{m_n} \leq k) - \frac{c}{n^3} \leq \mathbb{P}(L_n^{\nearrow} \leq k) \leq \mathbb{P}(L_{M_n} \leq k) + \frac{c}{n^3}$$

اثبات. با شرطی کردن روی تعداد نقاط در مربع $[0, \sqrt{n}] \times [0, \sqrt{n}]$ به بسط زیر می‌رسیم:

$$\mathbb{P}(L_n^{\nearrow} \leq k) = \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{-n} n^t}{t!} \mathbb{P}(L_t \leq k) = \sum_{t=0}^{+\infty} \omega_n(t) \mathbb{P}(L_t \leq k)$$

که $\omega_n(t) = \frac{e^{-n} n^t}{t!}$. سری بالا را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sum_{t=0}^{+\infty} \omega_n(t) \mathbb{P}(L_t \leq k) = \sum_{t<n-4\sqrt{n \log n}} + \sum_{n-4\sqrt{n \log n} \leq t \leq n+4\sqrt{n \log n}} + \sum_{n+4\sqrt{n \log n}<t<2n} + \sum_{2n \leq t} \tag{3.1}$$

ثابت می‌کنیم سهم اصلی سری بالا روی جمله دوم (t های نزدیک به n) است. برای ω_n تقریب استرلینگ استفاده می‌کنیم:

$$\omega_n(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-(n + t \log \frac{t}{n} - t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp(-f(t))$$

که $f(t) = n + t \log \frac{t}{n} - t$. با محاسباتی سرراست می‌دید که $f''(t) = \frac{1}{t}$ و در نتیجه f تابعی محدب است که علاوه بر آن چون تنها در نقطه $t = n$صفر می‌شود، تابعی مثبت نیز هست.
برای دو حالت $t > 2n$ و $t \leq 2n$ مساله را جدا جدا بررسی می‌کنیم:
در حالت اول، یعنی $t > 2n$، می‌توان نوشت:

$$f(t) \geq f(۲n) + (t - ۲n)f'(۲n) = n(۲\log ۲ - ۱) + (t - ۲n)\log ۲ = t\log ۲ - n$$

که نشان می‌دهد برای جمله آخر سری ۳.۱ داریم:

$$\sum_{۲n \leq t} \omega_n(t)\mathbb{P}(L_t \leq k) \leq \sum_{۲n \leq t} \omega_n(t) \leq e^{-c_۱ n}$$

که $c_۱$ عددی مثبت و مستقل از n است.

برای $t \leq ۲n$ چون مشتق دوم $f(t) - \frac{۱}{۴n}(t-n)^۲$ بیشتر از صفر است، این تابع مثبت است و در نتیجه برای نقاطی که حداقل فاصله $۴\sqrt{n\log n}$ با نقطه n دارند:

$$۴\log n \leq f(t)$$

پس:

$$\omega_n(t) \leq \exp(-f(t)) \leq \frac{c_۲}{n^۴}$$

که $c_۲$ نیز عددی مثبت و مستقل از n است و مانند مرحله قبل نشان می‌دهد مجموع جملات اول و سوم در سری ۳.۱ نیز حداکثر برابر $\frac{c_۲}{n^۳}$ است. در نهایت تنها جمله دوم باقی می‌ماند که تعداد جملات آن $۴\sqrt{n\log n} = o(n)$ است و با توجه به نزولی بودن $\mathbb{P}(L_t \leq k)$، طبق لم ۲.۱ حکم ثابت می‌شود. $\square$

نتیجه ۴.۱. با مکمل گیری داریم: $\mathbb{P}(L_t \leq k) = ۱ - \mathbb{P}(L_t > k)$ و درنتیجه لم بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbb{P}(L_{m_n} > k) + \frac{c}{n^۳} \geq \mathbb{P}(L_n^{\nearrow} > k) \geq \mathbb{P}(L_{M_n} > k) - \frac{c}{n^۳}$$

از آنجا که برای هر متغیر تصادفی مثبت $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geq ۰}\mathbb{P}(X > k)$ با جمع زدن روی $k = ۱, \ldots, ۲n$ به دست می‌آوریم:

$$\mathbb{E}(L_{m_n}) + \frac{c}{n^۲} \geq \mathbb{E}(L_n^{\nearrow}) - \sum_{k \geq ۲n}\mathbb{P}(L_n^{\nearrow} > k) \geq \mathbb{E}(L_{M_n}) - \frac{c}{n^۲}$$

اما اگر L_n بیشتر از k باشد، باید داخل مربع $[۰, \sqrt{n}] \times [۰, \sqrt{n}]$ بیش از k نقطه وجود داشته باشد که این نشان می‌دهد:

$$\mathbb{P}(L_n^{\nearrow} > k) \leq \frac{e^{-n}n^k}{k!} \leq e^{-ck}$$

که نشان می‌دهد جمله $\sum_{k\geq ۲n}\mathbb{P}(L_n^{\nearrow} > k)$ حداکثر به شکل e^{-cn} است و در نتیجه:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathbb{E}(L_n)}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\mathbb{E}(L_n^{\nearrow})}{\sqrt{n}}$$

۳.۱ کران‌های بالا و پایین

در بخش قبل دیدیم $c = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(L_n)}{\sqrt{n}}$ وجود دارد. در این بخش کران‌هایی برای c به دست خواهیم آورد و مشاهده می‌کنیم $c \neq ۰, +\infty$. ابتدا کران پایینی برای c ارائه می‌دهیم:
قضیه زیر نتیجه یکی از قضایای معروف درباره زنجیرها در یک مجموعه با ترتیب جزیی است که اثبات آن در اکثر مرجع‌های ترکیبیاتی یافت می‌شود. اثبات این قضیه را در اینجا نمی‌آوریم هرچند ایده آن در فصل بعد و معرفی فرایند همرزلی نمایان می‌شود.

قضیه ۵.۱ (اردوش-زاکر). [۳] فرض کنید n و m دو عدد طبیعی هستند. در این صورت هر جایگشت در $S_{nm+۱}$ یا زیردنباله صعودی به طول $n+۱$ و یا زیردنباله نزولی به طول $m+۱$ دارد.

با استفاده از این قضیه ثابت می‌کنیم $c \leq \frac{۱}{۲}$.
اگر در این قضیه m را برابر n قرار دهیم نتیجه می‌شود هر جایگشت در $S_{n^۲+۱}$ یا یک زیر دنباله صعودی یا یک زیر دنباله نرولی به طول $n+۱$ دارد. می‌دانیم c حد دنباله $\frac{\mathbb{E}(L_n)}{\sqrt{n}}$ است. در نتیجه با در نظر گرفتن زیر دنباله $\{n^۲+۱\}_{n=۱}^{+\infty}$ از اعداد طبیعی

$$c = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(L_{n^۲+۱})}{n}$$

برای هر عدد طبیعی $l_n(\sigma)$ را متغیر تصادفی بزرگترین زیر دنباله نزولی σ بگیرید. از آن‌جا که با از چپ به راست نوشتن یک جایگشت، زیر دنباله‌های نزولی به صعودی تبدیل می‌شوند توزیع‌های دو متغیر تصادفی l_n و L_n یکی است و بنابراین $\mathbb{E}(L_n) = \mathbb{E}(l_n)$ و با بازنویسی قضیه۵.۱ برای $\sigma \in S_{n^۲+۱}$:

$$n \leq L_{n^۲+۱}(\sigma) + l_{n^۲+۱}(\sigma)$$

پس

$$n \leq \mathbb{E}(L_{n^۲+۱}) + \mathbb{E}(l_{n^۲+۱})$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{۱}{۲} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(L_{n^۲+۱})}{n}$$

بنابراین $c \leq \frac{۱}{۲}$
البته با استفاده از لم فکت(۱.۱) می‌توان کران پایین‌های دیگری یافت. از آنجا که هر جمله $\frac{\mathbb{E}(L_n^{\nearrow})}{\sqrt{n}}$ یک کران پایین برای cاست، با قرار دادن $n = ۱$ داریم $\mathbb{E}(L_۱^{\nearrow}) \leq c$. ولی در مربع $[۰,۱] \times [۰,۱]$ به احتمال $\frac{۱}{e}$ حداقل یک نقطه است و این نشان می‌دهد که:

$$\frac{۱}{e} \leq c$$

[۳] Erdos -Szkeres Theorem

با استفاده از لم زیر کران بالا برای c به دست می‌آوریم:

لم ۶.۱. برای هر $k \le n$ طبیعي:

$$\mathbb{P}(k \le L_n) \le \min\{۱, \frac{۱}{k!}\binom{n}{k}\}$$

اثبات. کافیست نشان دهیم $\mathbb{P}(k \le L_n) \le \frac{۱}{k!}\binom{n}{k}$.
اعداد

$$۱ \le i_۱ < i_۲ < \cdots < i_k \le n$$

را ثابت فرض کنید. بنا به تقارن احتمال این‌که

$$\sigma(i_۱), \sigma(i_۲), \dots, \sigma(i_k)$$

زیر دنباله صعودی در σ باشد $\frac{۱}{k!}$ است. از طرفی به $\binom{n}{k}$ طریق می‌توان اعداد $i_۱, i_۲, \dots, i_k$را انتخاب نمود و اگر $k \le L_n(\sigma)$ باید یکی از این زیر دنباله‌ها صعودی باشد که این حکم نتیجه می‌دهد. □

لم ۷.۱. $c \le e$

اثبات. اعداد e' و e'' را به صورت $e < e' < e''$ انتخاب کنید. داریم:

$$\mathbb{E}(L_n) = \sum_{۱\le k\le n} \mathbb{P}(k \le L_n) \le \sum_{۱\le k\le n} \min\{۱, \frac{۱}{k!}\binom{n}{k}\} = \sum_{۱\le k\le n} \min\{۱, \frac{n^k}{(k!)^۲}\} =$$

$$\sum_{۱\le k\le e''\sqrt{n}} + \sum_{e''\sqrt{n}<k\le n}$$

جملات مجموع اول را با ۱ تخمین می‌زنیم و در نتیجه مقدار آن از $e''\sqrt{n}$ کمتر می‌شود. برای جملات مجموع دوم از تقریب استرلینگ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{n^k}{(k!)^۲} \le (\frac{e'\sqrt{n}}{k})^{۲k} \le (\frac{e'}{e''})^{۲e''\sqrt{n}}$$

در نتیجه مجموع کل جملات سری دوم از $n(\frac{e'}{e''})^{۲e'\sqrt{n}}$ کمتر است. از آنجا که این عدد از مرتبه $o(\sqrt{n})$ است در حد قابل چشم پوشی است. بنابراین تنها جملات سری اول اهمیت دارند که با میل دادن e'' به e حکم ثابت می‌شود. □

۲. فرایند همرزلی

همانطور که در بخش قبل دیدیم ارتباطی هندسی بین فرایند نقطه‌ای پواسون در صفحه و مساله اولام وجود دارد. در نگاه هندسی احکامی که حدس آن‌ها در شکل جبری دشوار است، به مشاهداتی هندسی و عموماً ساده تبدیل می‌شوند. در این فصل این ارتباط را بیشتر مورد بررسی قرار می‌دهیم. یکی از ابزارهای مهم در این راه جفت‌سازی[۱] متغیرهای تصادفی مختلف روی یک فضای مشترک و یافتن نامساوی‌هایی بین آن‌هاست. در بخش اول فرایند همرزلی را بیان می‌کنیم و در بخش بعد با کمک آن اثبات نسبتا ساده‌ای برای $c = ۲$ ارائه می‌دهیم. این اثبات در سال ۱۹۹۵ توسط الدوس و دیاکونیس بیان شد.

۱.۲. معرفی فرایند همرزلی

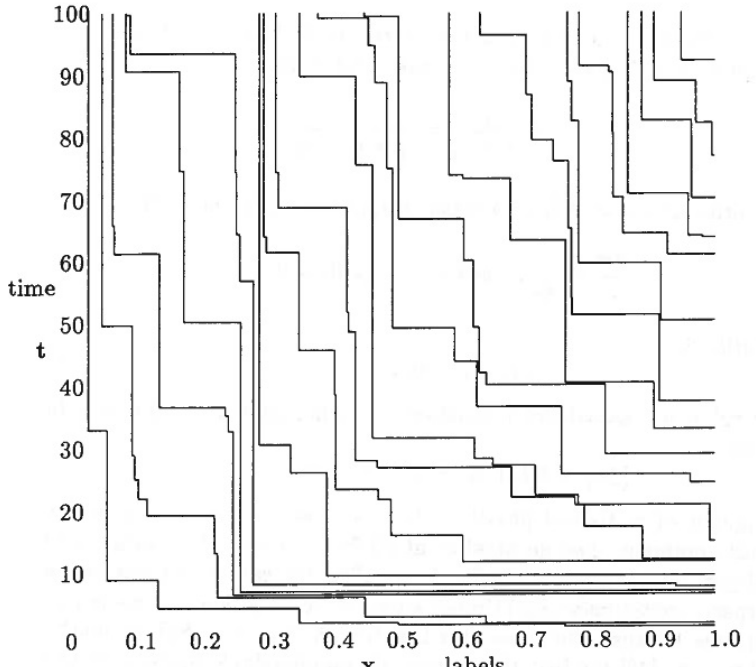
قبل از معرفی این فرایند مطالب بخش ۱.۱ را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید $\mathcal{N}$ یک فرایند نقطه‌ای پواسون در ربع اول صفحه و (x,t) نقطه‌ای دل‌خواه در این ناحیه باشد. به مستطیل $[۰,x]\times[۰,t]$ نگاه می‌کنیم و از بین تمام خطوط شکسته با شیب مثبت که شکستگی‌هایش نقاط فرایند نقطه‌ای باشد خطی که بیشترین نقطه را دارد پیدا می‌کنیم و $L^{\nearrow}(x,t)$ را تعداد نقاط روی آن در نظر می‌گیریم. بنابراین برای هر زوج (x,t) یک متغیر تصادفی داریم. با ثابت نگاه داشتن t، $L^{\nearrow}(x,t)$ تابعی پله‌ای و صعودی است که می‌توان آن را با تابع شمارشی

$$N^{+}(\ \cdot, t\ ) = L^{\nearrow}(\cdot, t)$$

روی $\mathbb{R}^{+}$ نمایش داد. متناظر با هر تابع شمارشی می‌توان یک آرایش از نقاط در نظر گرفت که محل نقاط آن برابر با مکان‌های جهش تابع شمارش است. در این صورت برای هر $x_۱ < x_۲$، $N^{+}(x_۲,t) - N^{+}(x_۱,t)$ تعداد نقاطِ در بازه $[x_۱, x_۲]$ را مشخص می‌کند.

با تغییر t این آرایش عوض می‌شود و آن‌چه برای ما اهمیت دارد نحوه تغییر آن است. فرض کنید در زمان t مختصاتِ نقاط در بازه $[۰,x]$، $۰ < \eta_۱ < \eta_۲ < \cdots < \eta_m < x$ باشد. اگر در ناحیه $[۰,x]\times[t,t+dt]$ نقطه‌ای از فرایند پواسون$\mathcal{N}$ قرار نگیرد این آرایش در طی این زمان عوض نمی‌شود. اما اگر در این ناحیه نقطه‌ی قرار گیرد که مولفه اول آن ϑ باشد و $\eta_i < \vartheta < \eta_{i+۱}$، آرایش نقاط در dt لحظه بعد یعنی $t+dt$ $۰ < \eta_۱ < \cdots < \eta_i < \vartheta < \eta_{i+۲} < \cdots < \eta_m < x$، خواهد شد. به عبارت دیگر به تصادف یک نقطه

[۱] Coupling



شکل ۱.۲.: توصیف هندسی فرایند همرزلی

جدید به وجود می‌آید و نزدیکترین نقطه سمت راست آن حذف می‌شود. اگر ϑ از تمام η_iها بزرگتر باشد نقطه‌ای حذف نخواهد شد و تنها این نقطه به انتهای مجموعه نقاط اضافه می‌شود.

از آن‌جا که امید تعداد نقاط در ناحیه $[t, t+dt] \times [0, x]$ ، $x.dt$ است، می‌توان تحول این نقاط را به شکل زیر بازنویسی کرد:

در لحظه شروع، $t = 0$، نقطه‌ای وجود ندارد. برای هر بازه $[x, x+dx]$ در بازه زمانی $[t, t+dt]$ به احتمال $dx.dt$ نزدیکترین نقطه سمت راست x به نقطه x جهش می‌کند تا آرایش در زمان $t+dt$ را بسازد.

این تحول از نقاط به فرایند همرزلی معروف است.

فرایند همزلی توسیف هندسی ساده‌ای دارد: برای ساده‌گی فرض کنید متناهی نقطه به طور یکنواخت از مستطیل $[0, x][0, t]$ انتخاب کردیم. تعدادی خطوط اضافه در این شکل رسم می‌کنیم: سمت چپ‌ترین نقطه را در نظر می‌گیریم و نیم خطی عمودی از آن به بالا رسم می‌کنیم. از این نقطه نیم خطی به راست رسم می‌کنیم و در نقاط زیر آن سمت چپ‌ترین نقطه را بدست می‌آوریم و آن را به نقطه قبل اضافه می‌کنیم. و این روند را ادامه می‌دهیم تا دنباله‌ای از خطوط شکسته ایجاد شود. در مرحله بعد این نقاط را حذف می‌کنیم و برای مابقی نقاط کار بالا را انجام می‌دهیم تا به شکلی مانند ۱.۲ برسیم. حال برخورد هر خطی افقی با این شکل، نقاط فرایند نقطه‌ای همرزلی را می‌دهد.

علاوه بر این می‌توان فرض کرد در زمان شروع توزیعی از نقاط مانند $n(z)$ داشته باشیم. در این صورت

تحول این فرایند به طریق زیر تعریف می‌کنیم:

$$N(x,t) = \sup_{0 \le z < m} (n(z) + L^{\nearrow}((z,0),(x,t)))$$

دو لم زیر از ناوردا بودن فرایند پواسون تحت تغییر مقیاس و قرینه‌سازی نتیجه می‌شوند:

لم ۲.۱. (ناوردایی فضا زمان): قرار دهید $\widehat{L}(x,t) = L^{\nearrow}(t,x)$ آن‌گاه:

$$(\widehat{L}(x,t); x,t \ge 0) \overset{d}{=} (L^{\nearrow}(x,t); x,t \ge 0)$$

لم ۲.۲. (ناوردایی مقیاس): برای هر $0 < \kappa < \infty$ ثابت:

$$(\widehat{L}(x,t); x,t \ge 0) \overset{d}{=} (L^{\nearrow}(\kappa x, \frac{t}{\kappa}); x,t \ge 0)$$

۲.۲. فرایند همرزلی در رفتارهای بزرگ

همانطور که در انتهای فصل اول اشاره کردیم $c = \lim_{x\to\infty} \frac{L^{\nearrow}(x,x)}{x^2}$ تقریبا همیشه وجود دارد. علاوه بر این از خاصیت ناوردایی مقیاس نتیجه می‌شود که $\lim_{xt\to\infty} \frac{L^{\nearrow}(x,t)}{xt}$ نیز وجود دارد و برابر c است:
در انتهای این فصل قضیه زیر را ثابت خواهیم کرد:

قضیه ۲.۳. الف) $c = 2$.
ب) اگر $a > 0$ را ثابت و t را به بی‌نهایت میل دهیم، فرایند شمارشی:

$$(L^{\nearrow}(at+y,t) - L^{\nearrow}(at,t), -\infty < y < \infty)$$

در توزیع به فرایند نقطه‌ای پواسون با نرخ $a^{-\frac{1}{2}}$ میل می‌کند.

قبل از اثبات این قضیه توجیهی برای $c = 2$ بیان می‌کنیم تا خطوط اصلی اثبات روشن شود.
فرض کنید توزیع نقاط نزدیک (x,t) نزدیک به یک فرایند نقطه‌ای پواسون باشد. با تعریف $\omega(x,t) = \mathbb{E}L^{\nearrow}(x,t)$ نرخ این فرایند در این نقطه $\frac{d\omega}{dx}$ است و در نتیجه نزدیک‌ترین نقطه سمت راست x در فاصله $\frac{1}{\frac{d\omega}{dx}}$ از آن است. درنتیجه ω در معادله دیفرانسیل پاره‌ای زیر صدق می‌کند:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\frac{d\omega}{dx}} \quad ; \quad \omega(0,x) = \omega(t,0) = 0$$

که حل آن به صورت $\omega(x,t) = 2\sqrt{xt}$ است و بنابراین $c = 2$.
فرایند همرزلی را روی $\mathbb{R}$ نیز می‌توان گسترش داد:

تعریف ۴.۲. به یک فرایند نقطه‌ای روی $\mathbb{R}$ همرزلی می‌گوییم هرگاه تحدید آن به هر بازه $[x_1, x_2]$ تحولی به شکل زیر داشته باشد:
الف) در زمان‌هایی سمت چپ‌ترین نقطه $[x_1, x_2]$ (در صورت وجود) حذف می‌شود.
ب) فرایند پواسونی با نرخ $x_2 - x_1$ وجود دارد که در آن زمان‌ها نقطه‌ای به طور یکنواخت از $[x_1, x_2]$ انتخاب و به نقاط فعلی اضافه می‌شود و نقطه سمت راست آن حذف می‌شود.

قضیه ۵.۲. فرض کنید $n(z)$ آرایشی از نقاط در $\mathbb{R}$ باشد که:

$$\liminf_{z\to-\infty} \frac{n(z)}{z} > 0$$

در این صورت فرایند زیر یک فرایند همرزلی است:

$$N(x,t) = \sup_{-\infty<z\le x} (n(z) + L^{\nearrow}((z,0),(x,t))), \quad -\infty < x \le -\infty,\ t \ge 0$$

اثبات. تنها نکته‌ای که باید چک شود متناهی بودن $N(x,t)$ است که معادل است با:

$$\frac{L^{\nearrow}((z,0),(x,t))}{-z} \to 0$$

وقتی $z \to -\infty$. اما می‌دانیم

$$L^{\nearrow}((z,0)(x,t)) \sim c\sqrt{t(x+z)}$$

در نتیجه $N(x,t)$ تقریبا همیشه متناهی است. □

از این به بعد خود را محدود به فرایند همرزلی از نوع بالا می‌کنیم.

تعریف ۶.۲. توزیع روی μ برای یک فرایند همرزلی
الف) ناوردا در زمان است اگر با شروع از آن، توزیع نقاط μ بماند.
ب) تحت انتقال ناوردا است اگر با انتقال در راستای محور x ناوردا بماند.
ج) با چگالی متناهی است اگر $\mathbb{E}\,|N(x,0)| < \infty$

منظور از ν_λ فرایند نقطه‌ای پواسونی با نرخ λ است و منظور از یک ترکیب از ν_λ ها یک فرآیند نقطه‌ای متناظر با اندازه احتمال ρ روی $\mathbb{R}$ است که این فرآیند به احتمال متناسب با $\rho(d\lambda)$ برابر ν_λ است.

در ادامه این بخش دو لم هرچند بدون برهان می‌آوریم.

لم ۷.۲. توزیع μ برای یک فرایند همرزلی ناوردا در زمان و انتقال با چگالی متناهی است اگر و تنها اگر ترکیبی از ν_λها باشد.

لم ۸.۲. فرض کنید $\mathcal{N}$ یک فرایند همرزلی با توزیع ناوردای ν_λ باشد. فرایند $\widehat{\mathcal{N}}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:
$\widehat{\mathcal{N}}(x,t) =$ تعداد نقاطی که از بازه (t,∞) در زمان $[0,x]$ خارج می‌شوند.
در این صورت $\widehat{\mathcal{N}}$ فرایندی همرزلی با توزیع ناوردا $\nu_{\lambda^{-1}}$ است.

۳.۲. کران بالایی

فرایند همرزلی

$$\mathcal{N}^{۱}(x,t) = L^{\nearrow}(x,t)$$

حالت خاصی از فرایندهای تعریف شده در قضیه ۵.۲ است با توزیع اولیه زیر:

$$\mathcal{N}^{۱}(x,\circ) = \begin{cases} \circ & x \geq \circ \\ -\infty & x < \circ \end{cases}$$

$\mathcal{N}^{۲}(x,t)$ را نیز فرایندی بگیرید با شروع ν_b که b عددی حقیقی و مثبت است. نکته مهم این است که برای هر دو فرایند $\mathcal{N}^{۱}(x,t)$ و $\mathcal{N}^{۲}(x,t)$ می‌توان از یک فرایند نقطه‌ای پواسون استفاده کرد. با توجه به این‌که

$$\mathcal{N}^{۱}(\circ,\circ) = \mathcal{N}^{۲}(\circ,\circ)$$

واضح است که برای هر $x,t \geq \circ$

$$\mathcal{N}^{۱}(x,t) \leq \mathcal{N}^{۲}(x,t)$$

. در نتیجه:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathcal{N}^{۱}(x,t) &\leq \mathbb{E}\mathcal{N}^{۲}(x,t) \\ &= \mathbb{E}\mathcal{N}^{۲}(x,\circ) + (\mathbb{E}\mathcal{N}^{۲}(x,t) - N^{۲}(x,\circ)) \\ &= bx + (\mathbb{E}\mathcal{N}^{۲}(x,t) - \mathcal{N}^{۲}(x,\circ)) \end{aligned}$$

زیرا $\mathcal{N}^{۲}(\cdot,\circ)$ فرایندی پواسون با نرخ bاست. لم ۸.۲ نتیجه می‌دهد:

$$\mathcal{N}^{۲}(x,t) - N^{۲}(x,\circ)$$

فرایندی همرزلی با شروع $\nu_{b^{-۱}}$ است. از آن‌جا که نامساوی بالا برای هر b برقرار است با مینیمم کردن روی b داریم:

$$\mathcal{N}^{۱}(x,t) \leq ۲\sqrt{xt}$$

پس:

$$c \leq ۲$$

۴.۲. محاسبه حد

برای به دست آوردن کران پایین جفت‌سازی های دیگری بین متغیر تصادفی‌ها تعریف می‌کنیم.

تعریف ۹.۲. برای دو آرایش نقاط η_1 و η_2 می‌نویسیم

$$\eta_1 \subseteq \eta_2$$

هرگاه هر نسخه از η_1 زیر مجموعه η_1 باشد و می‌نویسیم

$$\eta_1 \subseteq_{st} \eta_2$$

اگر بتوان $\eta_i \overset{d}{=} \eta'_i$ یافت $(i = 1, 2)$ که

$$\eta'_1 \subseteq \eta'_2$$

$\mathcal{N}^+(s,t) = L^{\nearrow}((0,0),(s,t))$ را فرایند همرزلی دلخواه بگیرید. توجه کنید که این فرایند در شروع نقطه‌ای قرار ندارد و طبیعتا با اضافه کردن نقطه این فرایند مقدار بزرگتری می‌شود. لم زیر از این مشاهده به دست می آید:

لم ۱۰.۲. الف)برای هر $t, t_0 \geq 0$

$$\mathcal{N}^+(\cdot, t) \subseteq_{st} \mathcal{N}^+(\cdot, t + t_0)$$

ب) برای هر $t, z \geq 0$

$$\mathcal{N}^+(\cdot, t) \supseteq_{st} \mathcal{N}^+(\cdot + z, t)$$

از فصل ۱ به یاد آورید که

$$g(x) = \mathbb{E}L^{\nearrow}(x, x)$$

همانطور که دیدیم $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x}$ وجود دارد. با لم بالا نتیجه قوی‌تری هم می‌توان ثابت کرد:

لم ۱۱.۲.

$$g'(x) \to c$$

وقتی $x \to \infty$

اثبات. لم قبل نتیجه می‌دهد برای هر $x, x_0, t, t_0 > 0$:

$$\mathbb{E}\mathcal{N}^+(x + x_0, t) - \mathbb{E}\mathcal{N}^+(x, t) \leq \mathbb{E}\mathcal{N}^+(x + x_0, t + t_0) - \mathbb{E}\mathcal{N}^+(x, t + t_0)$$

اما به علت ناوردایی مقیاس

$$\mathbb{E}\mathcal{N}^+(x,t) = g(\sqrt{xt})$$

در نتیجه نامساوی بالا می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$g(\sqrt{(x+x_\circ)t}) - g(\sqrt{xt}) \leq g(\sqrt{(x+x_\circ)(t+t_\circ)}) - g(\sqrt{x(t+t_\circ)})$$

که با تقسیم بر xt و حدگیری $x \to x_\circ, t \to t_\circ$:

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dt} g(\sqrt{xt}) \geq \circ$$

و یا برای $z > \circ$ ،

$$g'(z) + zg''(z) \geq \circ$$

این نامساوی معادل صعودی بودن تابع $z \to zg'(z)$ است. بنابراین برای هر عدد ثابت $z_\circ$:

$$g'(z) \geq \frac{g'(z_\circ)z_\circ}{z}; \quad z > z_\circ$$

اکنون بازه $[z_۱, z_۱ + z_۲]$ را در نظر بگیرید. با زیر جمعی بودن:

$$g(z_۱ + z_۲) - g(z_۱) \geq g(z_۲)$$

بنابراین عدد $z_\circ \in [z_۱, z_۱ + z_۲]$ وجود دارد که:

$$g'(z_\circ) \geq \frac{g'(z_۲)}{z_۲} \qquad \Rightarrow$$

$$g'(z_۱ + z_۲) \geq \frac{g'(z_\circ)z_\circ}{z_۱ + z_۲} \geq \frac{g'(z_۲)z_۱}{z_۱(z_۱ + z_۲)}$$

و بنابراین با قرار دادن $z_۲ = \sqrt{z}$ و $z_۱ = z - z_۲$ به کران پایین

$$\liminf_z g'(z) \geq c$$

می‌رسیم. برای به دست آوردن کران بالا انتگرال می‌گیریم:

$$g(z) - g(z_\circ) \geq z_\circ g'(z_\circ)\log(z/z_\circ\,)\ ; \quad z > z_\circ$$

و با قرار دادن $z = (۱+\delta)z_\circ$ در نامساوی $g(z) \leq cz$:

$$g'(z_\circ) \leq \frac{c(۱+\delta) - \frac{g(z_\circ)}{z_\circ}}{\log(۱+\delta)}$$

پس

$$\limsup_z g'(z) \leq \frac{c\delta}{\log(۱+\delta)}$$

و اگر $\delta \downarrow ۰$ لم اثبات می‌شود. □

لم ۱۲.۲. با ثابت نگه داشتن $-\infty < x$ و $u < \infty$:

$$\mathbb{E}\mathcal{N}^+(t+x, t+u) - \mathbb{E}\mathcal{N}^+(t,t) \to \frac{۱}{۲}c(x+u)$$

اثبات.

$$\mathbb{E}\mathcal{N}^+(t+x, t+u) - \mathbb{E}\mathcal{N}^+(t,t) \to g(\sqrt{(t+x)(t+u)}) - g(t)$$

اما $\sqrt{(t+x)(t+u)} - t \to \frac{۱}{۲}c(x+u)$ و لم اثبات می‌شود.

در ادامه قضیه اصلی این بخش را ثابت می‌کنیم. $\mu_t \ , \ t > ۰$ را توزیع $\mathcal{N}^+(\cdot + t, t)$ می‌گیریم. از لم نتیجه می‌گیریم دنباله μ_t تنگ[۲] است. علاوه بر این اثبات این موضوع سخت نیست که اگر توزیع μ وجود داشته باشد که $t_j \to ۰$ و $\mu_{t_j} \to \mu$ ، آن‌گاه μ برای فرایند همرزلی ناورداست.

□

برهان قضیه ۳.۲ :از تایت بودن μ_t ها نتیجه می‌شود زیر دنباله‌ای از آن به اندازه ناوردای μ میل می‌کند و در نتیجه با لم ۷.۲ ترکیبی از اندازه‌های ν_λ با چگالی احتمال تابعی مانند Λ است. حال از تقارن فضا زمان فرایند همرزلی (لم ۱.۱ و ۱.۲) و این که μ_t حد توزیع‌های $\mathcal{N}(\cdot + t, t)$ است نتیجه می‌شود اگر فرایندی همرزلی را از شروع μ کنیم این اندازه‌ای برای آن ناورداست. در نتیجه با لم ۲.۸ :

$$\Lambda \stackrel{d}{=} \Lambda^{-۱}$$

. اما

$$۱ = \mathbb{E}(\Lambda\Lambda^{-۱}) \leq (\mathbb{E}\Lambda)(\mathbb{E}\Lambda^{-۱}) = (\mathbb{E}\Lambda)^۲$$

پس $\mathbb{E}\Lambda \geq ۱$ حال داریم:

$$\begin{aligned} ۲u\mathbb{E}\Lambda &= \mathbb{E}(N(۲u, ۰) - N(۰, ۰)) \\ &\leq \liminf_j \mathbb{E}(\mathcal{N}^+(۲u + t, t) - N^+(t,t)) \leq cu \end{aligned}$$

پس $c \geq ۲\mathbb{E}\Lambda$ و چون $\mathbb{E}\Lambda \geq ۱$ این نشان می‌دهد $c \geq ۲$ اما دیدیم $c \leq ۲$ پس

$$c = ۲$$

[۲] tight

. علاوه بر این $\mathbb{E}\Lambda = ۱$ نتیجه می‌دهد

$$\mathbb{P}(\Lambda = ۱) = ۱$$

. بنابراین هر زیردنباله μ_t به طور ضعیف به $\nu_۱$ میل می‌کند. تتنگ بودن μ_t ها نشان می‌دهد

$$\mu_t \to \nu_۱$$

که قضیه را برای $a = ۱$ ثابت می‌کند و از خاصیت ناوردایی مقیاس برای هر a اثبات می‌شود.

۳. قانون حدی نمودار یانگ

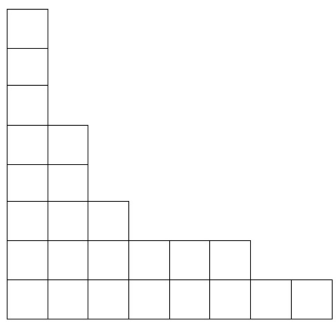
از نظر تاریخی مساله اولام اولین بار به عنوان حالت خاصی از یک مساله کلی‌تر توسط ورشیک و کروو اثبات شد. این مساله کلی، شکل حدی نمایش‌های گروه جایگشتی است که در حدود سال‌های ۱۹۷۰ میلادی یکی از مسایل داغ نظریه نمایش بود. در این فصل قصد داریم اثبات ساده شده آن‌ها را بیاوریم و ارتباط آن را با مساله اولام بیان کنیم. در نهایت با ابزارهای جبری دو قضیه ثابت خواهیم کرد که تشابه زیادی با قوانین اعداد بزرگ در احتمالات دارد.

۱.۳. نمودار یانگ

یک عدد طبیعی مانند n را به نحوه‌های مختلفی به صورت حاصل‌جمعی از اعداد طبیعی می‌توان نوشت. هر یک از این نحوه‌ها که اصطلاحاً افرازهای عدد n گفته می‌شوند، معادل نمایش آن به شکل:

$$n = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$$

است که $a_1, a_2, \cdots, a_n$ اعدادی صحیح و نامنفی هستند. مرسوم است که چنین افرازی را با $(1^{a_1}, 2^{a_2}, \cdots, n^{a_n})$ نشان دهند. برای درک بهتر این افراز می‌توان آن را با نموداری که از کنار هم گذاشتن a_n ستون n تایی، a_{n-1} ستون $n-1$ تایی، . . . و a_1 ستون ۱ تایی است، نمایش داد. شکل ۱.۳ این نمودار را برای یک افراز عدد ۲۴



شکل ۱.۳.: نمودار یانگ افراز $(8^1, 5^1, 3^1, 2^3, 1^2)$

نشان می‌دهد. به نمودار بالا نمایش فرانسوی افراز می‌گویند. نمایش‌های روسی و انگلیسی به ترتیب از دوران ۴۵ و ۹۰ درجه این نمودار در جهت عقربه‌های ساعت به دست می‌آیند.

تعریف ۱.۳. مجموعه نمودارهایی که از افراز عدد n به دست می‌آیند را با $\mathbb{Y}_n$ و مجموعه تمام آن‌ها به ازای اعداد مختلف را با $\mathbb{Y}$ نشان می‌دهیم و به هر یک از آن‌ها نمودار یانگ می‌گوییم. یک مربع در نمودار یانگ گوشه‌ای نامیده می‌شود اگر سمت راست و بالای آن مربع دیگری نباشد.

از آن‌جا که با اضافه کردن یک مربع به یک نمودار یانگ عدد n، نمودار یانگی از عدد $n+۱$ ساخته می‌شود، تعداد نمودارهای یانگ رشدی صعودی بر حسب n دارد. اگرچه فرمول ساده‌ای برای تعداد دقیق آن‌ها وجود ندارد، رامانوجان[۱] و هاردی[۲] در ۱۹۱۸ توانستند تقریبی از مرتبه آن ارائه دهند:

$$P(n) \sim \frac{۱}{۴n\sqrt{۳}} e^{\pi\sqrt{۲n/۳}}$$

افرازهای اعداد طبیعی در زمینه های مختلفی از ریاضیات ظاهر می‌شوند. یکی از آن‌ها نمایش‌های گروه تقارنی و یا S_n است. در نظریه نمایش نشان داده می‌شود تعداد نمایش‌های تحویل‌ناپذیر یک گروه برابر کلاس‌های تزویجی آن است (برای بررسی اجمالی نظریه نمایش می‌توانید به ضمیمه مراجعه کنید). در نتیجه در گروه تقارنی که کلاس‌های تزویجی با تجزیه دوری جایگشت‌ها مشخص می‌شوند، تعداد نمایش‌های تحویل‌ناپذیر S_n و افرازهای عدد n یکی می‌شود. نکته جالب وجود تناظری طبیعی بین این دو مجموعه است. به بیان دیگر متناظر هر نمودار یانگ λ، نمایش تحویل‌ناپذیر(U_λ, S_λ) داریم که S_λ یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ و U_λ تابع نمایش است. از این نکته استفاده می‌کنیم و به نمودار λ وزنی برحسب $\dim(S_\lambda)$ نسبت می‌دهیم. از نظریه نمایش می‌دانیم جمع مربعات این اعداد برابر اندازه گروه S_n است،

$$\sum_{\lambda} \dim\left(S_\lambda\right)^{۲} = n!$$

در نتیجه می‌توانیم به نمودار λ اندازه احتمال $\frac{\dim\left(S_\lambda\right)^{۲}}{n!}$ را نسبت دهیم و با آن شکل حدی نمودارهای یانگ را به دست آوریم. در قسمت‌های بعدی ارتباط این وزن‌دهی و مساله اولام را مشخص می‌کنیم.

۲.۳. نمایش‌های تحویل ناپذیر گروه جایگشتی

در این قسمت سعی می‌کنیم تناظر بین نمایش‌های تحویل‌ناپذیر S_n و نمودارهای یانگ را شرح دهیم. برای این کار نیاز به ارائه مجموعه‌ای داریم که گروه S_n روی آن عمل کند. یکی از بهترین‌ترین مثال‌ها، تابع‌های n متغیره هستند. هر عضو $\sigma \in S_n$ روی یک تابع n متغیره $F(x_۱, \cdots x_n)$ به شکل زیر عمل می‌کند:

$$(\sigma.F)(x_۱, \cdots x_n) = F(x_{\sigma(۱)}, \cdots x_{\sigma(n)})$$

---

[۱] S.Ramanujan

[۲] G.H.Hardy

و در نتیجه با در نظر گرفتن تمام توابع، نمایشی از S_n به دست می‌آوریم. علاوه بر این هر زیر مجموعه‌ای از توابع که تحت جا به جا کردن متغیرهایش ناوردا باشد، مانند چند جمله‌ای های n متغیره، نمایشی از S_n به دست خواهد داد.

تعریف ۲.۳. برای نمودار یانگ λ مجموعه توابع یک به یک و پوشا از خانه‌های λ به $\{1, \cdots, n\}$ را با نمایش می‌دهیم. به بیان دیگر $Tab(\lambda)$ نحوه‌های مختلف نوشتن اعداد ۱ تا n در خانه‌های λ است.

برای هر $T \in Tab(\lambda)$، $T(i,j)$ را عدد خانه (i,j) قرار دهید. گروه S_n روی $Tab(\lambda)$ به صورت طبیعی عمل می‌کند:

$$\begin{cases} T \in Tab(\lambda) \\ \sigma \in S(n) \end{cases} \qquad (\sigma.T)(i,j) = \sigma(T(i,j))$$

برای هر عضو $T \in Tab(\lambda)$ چند جمله‌ای $\Delta(T)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Delta(T) = \prod_{a=1}^{col(\lambda)} \prod_{1 \leq i < j \leq \lambda_a} (x_{T(a,i)} - x_{T(a,j)})$$

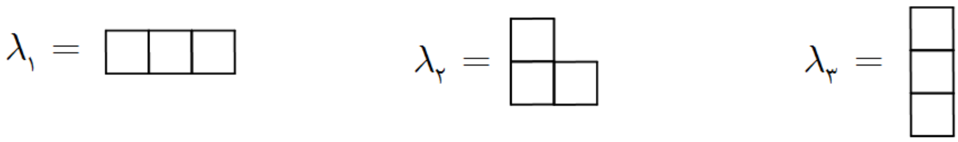
که در آن‌ها $col(\lambda)$ تعداد ستون های λ و λ_a اندازه ستون a است. اگر S_λ را فضای برداری تولید شده توسط تمام $\Delta(T)$ روی $\mathbb{C}$ بگیرید یک نمایش (U_λ, S_λ) از S_n خواهیم داشت. این نمایش تحویل‌ناپذیر است و تمام نمایش‌های S_n به این صورت هستند. برای درک بهتر این موضوع آن را برای $n = 3$ نشان می‌دهیم. در این حالت سه نمودار شکل ۲.۳ را داریم.

برای λ_1 هر $\Delta(T)$ برابر یک است و در نتیجه $(S_{\lambda_1}, U_{\lambda_1})$ نمایش یک بعدی (بدیهی) S_3 است. برای λ_3 هر $\Delta(T)$ برابر یکی از اعداد $\pm(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)$ است. علامت $\pm$ بسته به نحوه عدد گذاری اعداد در λ_3 است. می‌توان به راحتی دید که $(S_{\lambda_3}, U_{\lambda_3})$ نمایش یک بعدی است که به هر $\sigma \in S_3$ علامت آن را نسبت می‌دهد. اما نمایش $(S_{\lambda_2}, U_{\lambda_2})$ کمی‌پیچیده‌تر است. در این حالت $\Delta(T)$ می‌تواند یکی از اعضای مجموعه $\{\pm(x_1 - x_2), \pm(x_2 - x_3), \pm(x_1 - x_3)\}$ باشد. اما $x_1 - x_3$ از جمع $x_1 - x_2$ و $x_2 - x_3$ به دست می‌آید. پس S_{λ_2} یک فضای برداری دو بعدی است، $S_{\lambda_2} = \langle x_1 - x_2 x_2 - x_3 \rangle$. متناظر هر $\sigma \in S_3$ یک تبدیل خطی روی این فضا به دست می‌آید که با محاسباتی سرراست می‌توان آن را به دست آورد. در شکل ۲.۳ این تناظر آمده است.

تعریف ۳.۳. یک $T \in Tab(\lambda)$ را نمودار یانگ استاندارد می‌نامیم، هرگاه اعداد $T(i,j)$ با ثابت نگاه داشتن i یا j نسبت به مولفه دیگر صعودی باشد. مجموعه نمودارهای یانگ استاندارد را با $STab(\lambda)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$f^\lambda = |STab(\lambda)|$$

تعریف ۴.۳. فرض کنید $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ و $\square_1, \square_2, \cdots, \square_q$ مربع‌های گوشه‌ای آن باشند. (i_k, j_k) را مولفه‌های مربع $\square_k$ و V_k را زیر فضایی که با $\Delta(T)$ هایی که در مربع $\square_k$ عدد n نوشته شده است بگیرید. تعریف



شکل ۲.۳.: نمودار های یانگ برای $n = 3$

$$(1,2) \to \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad id \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2,3) \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (1,2,3) \to \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(1,3) \to \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1,3,2) \to \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

شکل ۳.۳.: نمایش گروه S_3

می‌کنیم: $\tilde{V_k} = V_k + \cdots + V_q$. برای هر k, $q = 1, 2, \cdots$ ، $\lambda^{(q)}$ را نمودار $\lambda - \square_k$ می‌گیریم و برای دو نمودار یانگ λ و Λ نماد $\Lambda \nearrow \lambda$ به معنای این است که نمودار λ از حذف یک مربع گوشه‌ای Λ به دست آمده است.

قضیه ۵.۳. مجموعه $\{\Delta(T) \,|T \in STab(\lambda)\}$ یک پایه برای S_λ می‌سازند و در نتیجه $\dim(S_\lambda) = f^\lambda$.

اثبات. طرحی از اثبات ارایه می‌دهیم: استقلال (با استقرا روی $|\lambda|$): با مقایسه توان x^n در چند جمله‌ای‌ها می‌توان دید V_iها مستقل هستند. حال برای هر یک از V_iها می‌توانیم از فرض استقرا استفاده کنیم.
مولد بودن: کافیست نشان دهیم هر $\Delta(T)$ که $T \in Tab(\lambda)$ را می‌توان به شکل جمعی از $\Delta(T)$ها که $T \in STab(\lambda)$ نوشت. این کار را می‌توان استقرایی انجام دهیم: با جابجا کردن عدد n در سطر و ستون λ آن را به یک مربع گوشه‌ای λ برد. همین کار را برای با فرض استقرا برای اعداد کوچکتر انجام می‌دهیم. $\square$

تعریف ۶.۳. عضو $J_{n-1} \in \mathbb{C}[S_n]$ که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$J_{n-1} = (1, n) + (2, n) + \cdots + (n-1, n)$$

جسیس-مورفی[۳] خوانده می‌شود. برای هر $\lambda \in \mathbb{Y}_n$، $U_\lambda(J_{n-1})$ عملگر جسیس-مورفی نامیده می‌شود.

لم ۷.۳. فرض کنید $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ و عدد n در مربع گوشه‌ای $\square_k$ آن باشد. در این صورت:

$$U_\lambda(J_{n-1})\Delta(S) = (j_k - i_k)\Delta(S) + v, \qquad v \in \tilde{V}_{k+1}$$

این لم اثباتی ترکیبیاتی دارد که در اینجا از اثبات آن صرف‌نظر می‌کنیم.

نتیجه ۸.۳. مقادیر ویژه $U_\lambda(J_{n-1})$ اعداد

$$j_1 - i_1,\ j_2 - i_2,\ \cdots\ , j_k - i_k$$

با تکرر (به ترتیب)

$$\dim(\lambda^{(1)}),\ \dim(\lambda^{(2)}),\ \cdots\ , \dim(\lambda^{(k)})$$

هستند.

با داشتن نمودار یانگ $\Lambda \in Y_n$ به دست آوردن تعداد نمودارهای یانگ استاندارد با شکل Λ یک مساله ترکیبیاتی است که به صورت استقرایی می‌توان آن را حل کرد. با توجه به این که بزرگترین عدد، n، تنها می‌تواند در مربع‌های گوشه‌ای باشد، رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آید:

$$f^\Lambda = \sum_{\lambda \nearrow \Lambda} f^\lambda$$

تعریف ۹.۳. برای درایه $\square_{(a,b)} \in \Lambda$ اندازه هوک $h_{(a,b)}$ را برابر با تعداد مربع‌های سمت راست و بالای این مربع به علاوه یک قرار می‌دهیم. به عنوان مثال برای مربع‌های گوشه‌ای اندازه هوک برابر یک و برای مربع $\square_{(1,1)}$ اندازه هوک برابر $row(\Lambda) + col(\Lambda) - 1$ است.

قضیه ۱۰.۳. فرمول هوک (شکل اول):

$$f^\Lambda = \frac{n!}{\prod\limits_{(a,b)\in\Lambda} h_{(a,b)}}$$

که این فرمول را با اندکی محاسبات جبری به شکل زیر نیز می‌توان باز نویسی کرد:

قضیه ۱۱.۳. فرمول هوک (شکل دوم): فرض کنید l_i اندازه هوک درایه $(i,1)$ باشد. (به بیان دیگر $l_i = \Lambda_i + row(\Lambda) - i$) آن‌گاه:

$$f^\Lambda = n!\ \frac{\prod\limits_{1\le j<i\le row(\Lambda)} (l_j - l_k)}{\prod\limits_{j=1}^{row(\Lambda)} l_j!}$$

[۳] elements Jucys–Murphy

اثبات. با استقرا روی n. $n = ۱$ بدیهی است و فرض کنید این فرمول برای تمام نمودارهای با اندازه $n - ۱$ درست است. همچنین فرض کنید $\Lambda \in \mathbb{Y}_n$ یک نمودار یانگ دل‌خواه است که مربع‌های گوشه‌ای آن $\square_q, \cdots, \square_۲, \square_۱$ با مولفه های (x_i, y_i) هستند. در این صورت با جای‌گذاری در رابطه بازگشتی و ساده‌سازی عبارت حاصل، باید نشان داد جملات زیر برابر n است:

$$\sum_{i=۱}^{k} \frac{\prod\limits_{j<x_i} (l_j - l_{x_i} + ۱) \prod\limits_{j>x_i} (l_{x_i} - l_j + ۱)}{\prod\limits_{j<x_i} (l_j - l_{x_i}) \prod\limits_{j>x_i} (l_{x_i} - l_j)} l_{x_i}$$

$$= \sum_{i=۱}^{k} \frac{\prod\limits_{j=۱}^{k} l_j - l_{x_i} + ۱}{(l_{x_i} - l_۱) \cdots (\widehat{l_{x_i} - l_{x_i}}) \cdots (l_{x_i} - l_k)} l_{x_i}$$

که علامت $\widehat{\ }$ به معنای حذف آن جمله است. اثبات می‌کنیم سری آخر برابر $l_۱ + l_۲ + \cdots + l_k - k + ۱$ است و از تعریف l_i ها به دست می‌آید که این حاصل جمع برابر n است. ادعای اخیر را می‌توان با بررسی ضریب جمله خطی اتحاد زیر به دست آورد: (برای اثبات اتحاد $x = l_j$ قرار دهید.)

$$x = \sum_{j=۱}^{k} l_j \frac{\prod\limits_{i=۱}^{k} (x - l_i)}{\prod\limits_{i=۱, i\neq j}^{k} (l_j - l_i)}$$

$\square$

۳.۳. الگوریتم رابینسون-شنستد

در سال ۱۹۳۸ رابینسون[۴] الگوریتمی معرفی کرد که تناظری یک به یک و پوشا بین جایگشت‌های S_n و زوج نمودارهای استاندارد یانگ برقرار می‌کرد. این الگوریتم اثباتی غیر جبری برای تساوی $\sum\limits_{\lambda} \dim (S_\lambda)^۲ = n!$ ارایه می‌دهد. بعدها شنستد[۵] آن را برای مجموعه وسیعتری گسترش داد و اکنون این الگوریتم به نام هر دوی آنها معروف است. یکی از نتایج الگوریتم این است که نشان می‌دهد مساله اولام حالت خاصی از مساله شکل حدی نمودارهای یانگ است. برای شرح الگوریتم نیاز به دو تعریف زیر داریم:

تعریف ۱۲.۳. یک تابلوی یانگ، یک نمودار یانگِ عدد گذاری شده است که عددهای آن در امتداد سطرها و ستون‌ها صعودی باشند. اعداد داخل هر مربع دلخواه ولی طبیعی هستند. نمودارهای استاندارد یانگ حالتی خاص از تابلوهای یانگ هستند. شکل ۳.۳ یک تابلوی یانگ عدد گذاری شده است.

[۴] Robinson
[۵] Schensted

۷			
۲	۸		
۱	۳	۵	۹

شکل ۴.۳.: تابلو یانگ قبل از الحاق ۴

۱	۸		
۲	۵		
۱	۳	۴	۹

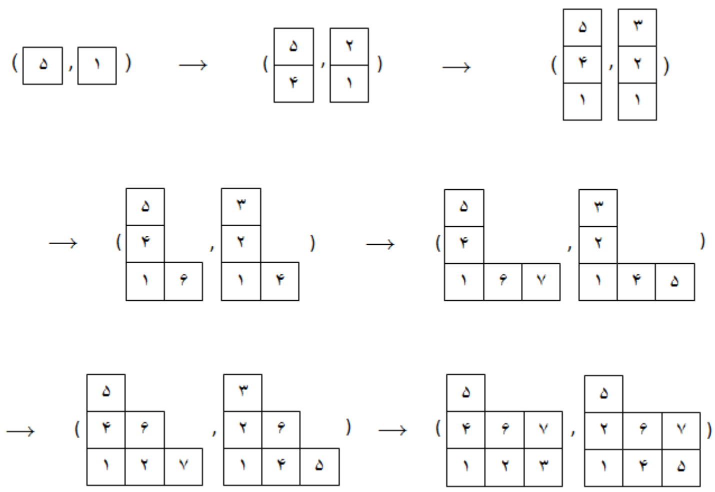
شکل ۵.۳.: تابلو یانگ بعد از الحاق ۴

تعریف ۱۳.۳. فرض کنید T یک تابلوی یانگ و x عددی طبیعی باشد که در این نمودار نیامده است. منظور از الحاق x به T تابلوی جدیدی است که با انجام فرایند زیر به دست می‌آید:

به سطر اول T نگاه می‌کنیم، اگر تمام اعداد این سطر از x کوچکتر بودند یک مربع به انتهای این سطر اضافه می‌کنیم، عدد x را در آن می‌نویسیم و کار تمام می‌شود. در غیر این صورت کوچکترین عدد بیشتر از x در سطر اول را پیدا می‌کنیم (فرض کنید این عدد y است) و عدد x را به جای آن قرار می‌دهیم. حال به سراغ سطر بعدی می‌رویم و همین عملیات را برای سطر دوم و عدد y (به جای x) انجام می‌دهیم و دوباره اگر به عدد z رسیدیم به سراغ سطر سوم می‌رویم و . . . . به عنوان مثال با در نظر گرفتن تابلوی ۳.۳ و الحاق عدد ۴ به آن، به تابلوی ۳.۳ می‌رسیم.

می‌توان نشان داد نمودار جدید همواره یک تابلوی یانگ می‌شود که نمودار آن از اضافه کردن یک مربع به نمودار قبل به دست می‌آید. اعداد نوشته شده در خانه‌های آن نیز اعداد قبلی و عدد x است. هرچند نحوه قرار گرفتن این اعداد در خانه ها بسته به مقدار آنها دستخوش تغییر می‌شود.

حال می‌توانیم الگوریتم رابینسون-شنستد را شرح دهیم: فرض کنید $\sigma \in S_n$ یک جایگشت دلخواه باشد. دو نمودار استاندارد یانگ P و Q را به صورت استقرایی می‌سازیم: در ابتدا فرض کنید هر دو نمودار تهی‌اند $(P_۰, Q_۰ = \varnothing)$ و همچنین فرض کنید در مرحله kام به دو تابلوی P_k و Q_k برسیم که نمودار هر دو یکی است. با الحاق $\sigma(k+۱)$ به P_k، $P_{k+۱}$ را می‌سازیم. نمودار $P_{k+۱}$ نسبت به Q_k یک خانه اضافه دارد. $Q_{k+۱}$ را تابلویی در نظر می‌گیریم که از اضافه کردن این خانه و نوشتن عدد $k+۱$ در آن به دست می‌آید. در انتها قرار می‌دهیم $P = P_n$ و $Q = Q_n$. در شکل ۳.۳ این الگوریتم را برای جایگشت $(۵, ۴, ۱, ۶, ۷, ۲, ۳)$ انجام داده‌ایم و



شکل ۶.۳.: الگوریتم رابینسن-شنستد روی جایگشت (۵, ۴, ۱, ۶, ۷, ۲, ۳)

نمودار (P_k, Q_k) را در هر مرحله رسم کردیم.

جایگشت $\sigma \in S_n$ را می‌توان با علامت گذاری نقاط $(k, \sigma(k))$ در $\mathbb{Z}^۲$ نشان داد که در این صورت برای الگوریتم رابینسون-شنستد می‌توان بیان هندسی ارائه داد. احکام زیر در این بیان هندسی دیده می‌شوند:

الف) اگر زوج (P, Q) متناظر جایگشت σ باشد، زوج (Q, P) متناظر $\sigma^{-۱}$ است و در نتیجه جایگشت‌های خود توان (یعنی $\sigma \in S_n$ هایی که $\sigma^۲ = id$) متناظر زوج های (P, P) هستند و تعداد آن‌ها برابر $\sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \dim(\lambda)$ است.

ب) ترانهاده یک جایگشت $\sigma = (x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$ جایگشتی است به شکل $\sigma^* = (x_n, \cdots, x_۲, x_۱)$ و ترانهاده یک تابلو یانگ T تابلویی مانند T^* است که از قرینه کردن آن حول نیمساز محورهای مختصات به دست می‌آید. در این صورت: $P(\sigma^*) = P(\sigma)^*$

ج) طول بزرگترین زیر دنباله صعودی σ برابر طول سطر اول P است.

حکم اخیر را به این علت که در این پایان‌نامه اهمیت زیادی دارد مستقیما اثبات می‌کنیم.

اثبات. فرض کنید $x_{i_۱}, x_{i_۲}, \cdots, x_{i_{L_n(\sigma)}}$ زیر دنباله صعودی $\sigma = (x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$ باشد. در این صورت هیچ یک از x_{i_j}ها نمی‌توانند در یک ستون $P(\sigma)$ قرار گیرند. زیرا اگر در ستونی مانند a چند عدد از x_{i_j}ها قرار گیرد و x_{i_s} پایین‌ترین عدد باشد، در مرحله‌ای که x_{i_s} به نمودار اضافه می‌شود چون پایین‌ترین عدد ستون a از x_{i_s} کوچکتر است عدد جدید باید به انتهای نمودار اضافه شود که ستونی غیر از a است و این تناقض است. در نتیجه $L_n(\sigma)$ حداکثر برابر سطر اول است.

باید نشان دهیم حداقل یک زیر دنباله صعودی به طول سطر اول P است. این حکم را در حالت کلی که σ

صرفاً دنباله‌ای از اعداد متمایز است اثبات می‌کنیم و روی تعداد اعداد σ استقرای قوی می‌زنیم. منتها قبل از آن توصیفی از اعداد ستون آخر P ارایه می‌دهیم: این اعداد اعضایی از σ هستند که هیچ عددی بزرگتر در سمت راست آن‌ها نیست. علت این موضوع روشن است. زیر اگر عضوی بزرگتر در سمت راستشان باشد هنگام الحاق آن باید به ستون بعدی برویم که تناقض است و از طرف دیگر اگر چنین عددی در σ باشد، آنگاه الحاق هر عددی بعد از الحاق این عضو در جایگاهی در ستون‌ها کوچکتر جا می‌گیرد. حال اعداد ستون آخر P را از σ کم کنید. با الگوریتم رابینسن-شنستد روی این مجموعه جدید به تابلوی P که ستون آخرش کم شده می‌رسیم و طبق فرض استقرا زیر دنباله‌ی صعودی با یک واحد کمتر از سطر P می‌یابیم. اگر به عضو آخر این دنباله در σ نگاه کنید حتما عددی بزرگتر از آن در سمت راست آن خواهید یافت (چون در ستون آخر نیست و نشان دادیم هر عضو غیر ستون آخر اینگونه است.) که در نتیجه با در نظر گرفتن آن طول زیر دنباله صعودی برابر سطر P خواهد شد. $\square$

حال جایگشت σ را به طور یکنواخت از بین تمام جایگشت‌های S_n انتخاب کنید و با استفاده از الگوریتم بالا از روی آن زوج (P, Q) را به دست آورید و تابعی که به σ نمودار P را نسبت می‌دهد (که با نمودار Q یکی است) در نظر بگیرید. احتمال این که با این نگاشت به نمودار λ برسیم $\frac{\dim(\lambda)^۲}{n!}$ است و این همان وزنی است که قبلا روی نمودارهای یانگ قرار دادیم. در نتیجه گزاره آخر نشان می‌دهد اگر نمودارهای یانگ حد داشته باشند، توزیع طول ستون اول آن برابر توزیع طول بزرگترین زیر دنباله صعودی در یک جایگشت تصادفی است.

۴.۳. توابع شکسته و قضیه اثر

این بخش حلقه اصلی بین نمودارهای یانگ و وزن روی آنهاست و از این جهت قضیه‌ای که در پایان بیان می‌کنیم در روند اثبات قضیه اصلی این فصل اهمیت اساسی دارد.

تعریف ۱۴.۳. یک تابع حقیقی λ شکسته خوانده می‌شود هرگاه:

۱. $\lambda(x)$ پیوسته است و قطعه قطعه خطی

۲. $\lambda'(x) = \pm ۱$ مگر در تعداد متناهی $x \in \mathbb{R}$

۳. برای $|x|$ به اندازه کافی بزرگ $\lambda(x) = |x|$

$\mathfrak{A}$ را مجموعه تمام توابع شکسته قرار دهید. در این صورت با دوران ۴۵ درجه هر نمودار یانگ می‌توان آن را به شکل یک تابع شکسته نگاه کرد. یک راه ساده‌تر برای معرفی یک عضو $\mathfrak{A}$ معرفی نقاط مینیمم یا ماکزیمم موضعی آن است. تعداد این نقاط متناهی است و در نتیجه با مرتب کردن آنها به شکل $x_۱ < y_۱ < \cdots <$ $x_{r-۱} < y_{r-۱} < x_r$ که x_i ها مینیمم موضعی و y_i ها ماکزیمم موضعی‌اند، یک مختصات روی اعضای $\mathfrak{A}$ به دست می‌آید.

لم ۱۵.۳. برای هر λ اگر $x_۱ < y_۱ < \cdots < x_{r-۱} < y_{r-۱} < x_r$ ماکزیمم و مینیمم‌های موضعی باشند:

$$\sum_{i=۱}^{r} x_i = \sum_{i=۱}^{r-۱} y_i$$

اثبات. پاره خطی که مبدا را به نقطه (x_r, x_r) وصل می‌کند در نظر بگیرید. از یک طرف طول آن $\sqrt{۲}\, x_r$ است و از طرف دیگر با افکنش هر یک از پاره‌خط‌های موازی خط $y = x$ روی آن، تعدادی پاره‌خط جدید به دست می‌آیند که این پاره‌خط را افراز می‌کنند. از آنجا که طول پاره‌خط های جدید $\sqrt{۲}\,(x_i - y_i)$ است داریم:

$$\sqrt{۲}\, x_r = \sum_{۱}^{r-۱} \sqrt{۲}\,(y_i - x_i) \quad \Rightarrow \quad \sum_{۱}^{r} x_i = \sum_{۱}^{r-۱} y_i$$

$\square$

نتیجه ۱۶.۳. یک نمودار یانگ دوران یافته در $\mathfrak{A}$ قرار دارد اگر و تنها اگر x_i و y_i متناظر آن اعداد به شکل $\frac{\sqrt{۲}}{۲}n$، $n \in \mathbb{Z}$ باشند و در رابطه بالا صدق کنند.

در ادامه این بخش به هر عضو $\lambda \in \mathfrak{A}$ دو توزیع روی $\mathbb{R}$ نسبت می‌دهیم. توزیع اول به اندازه ریله[۶] معروف است و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_\lambda = \sum_{i=۱}^{r} \delta_{x_i} - \sum_{i=۱}^{r-۱} \delta_{y_i}$$

روشن است که نگاشت $\tau_\lambda \to \lambda$ یک به یک است.

قضیه ۱۷.۳. فرض کنید $\lambda \in \mathfrak{A}$. در این صورت اگر $M_k(\tau_\lambda)$ گشتاور k ام τ_λ باشد، داریم:

$$M_k(\tau_\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \left(\frac{\lambda(x) - |x|}{۲}\right)'' dx$$

که در اینجا مشتق گیری در معنای توزیع گرفته شده است.

اثبات. با توجه به این که λ موضعا خطی است:

$$\tau_\lambda = \left(\frac{\lambda(x) - |x|}{۲}\right)'' + \delta_۰$$

که با جای‌گذاری به فرمول بالا می‌رسیم. $\square$

[۶] Rayleigh measure

اندازه دومی که برای هر $\lambda \in \mathfrak{A}$ تعریف می‌کنیم به شرح زیر است. دوباره فرض کنید x_i و y_i ها اکسترمم‌های نسبی نمودار λ باشند. تابع گویای زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{(z-y_۱)\cdots(z-y_{r-۱})}{(z-x_۱)\cdots(z-x_r)}$$

با بسط صورت و تجزیه به عوامل مخرج تابع بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{(z-y_۱)\cdots(z-y_{r-۱})}{(z-x_۱)\cdots(z-x_r)}=\frac{\mu_۱}{z-x_۱}+\cdots\frac{\mu_r}{z-x_r}$$

که، $\mu_i=\frac{(x_i-y_۱)\cdots(x_i-y_{r-۱})}{(x_i-x_۱)\cdots(x_i-x_{i-۱})(x_i-x_{i+۱})\cdots(x_i-x_r)}$ در نتیجه $\mu_i>۰$ و اگر دو طرف تساوی (۱) را در z ضرب کنیم و z را به بی نهایت میل دهیم خواهیم داشت: $\sum_۱^r \mu_i=۱$. حال اندازه انتقالی m_λ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$m_\lambda=\sum_{i=۱}^{r}\mu_i\delta_{x_i}$$

دو اندازه τ_λ و m_λ از روی همدیگر به دست می‌آیند. گزاره زیر گشتاورهای آنها را به یکدیگر ربط می‌دهد.

قضیه ۱۸.۳.

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{M_n(m_\lambda)}{z^n}=\exp\left\{\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{M_n(\tau_\lambda)}{n}\frac{۱}{z^n}\right\}$$

که دو طرف سری برای $|z|$ به اندازه کافی بزرگ همگراست.

اثبات. اگر $x_۱<y_۱<\cdots<x_{r-۱}<y_{r-۱}<x_r$ اکسترمم‌های λ باشند، داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{M_n(m_\lambda)}{z^n}=\sum_{n=۱}^{\infty}(\sum_{i=۱}^{r}\mu_i\frac{x_i^n}{z^n})=\sum_{n=۱}^{\infty}\mu_i(\sum_{i=۱}^{r}(\frac{x_i}{z})^n)=$$

$$\sum_۱^r\mu_i.\frac{۱}{۱-\frac{x_i}{z}}=\frac{(۱-\frac{y_۱}{z})\cdots(۱-\frac{y_{r-۱}}{z})}{(۱-\frac{x_۱}{z})\cdots(۱-\frac{x_r}{z})}$$

$$=\exp\left\{\sum_{i=۱}^{r-۱}\log(۱-\frac{y_i}{z})-\sum_{i=۱}^{r}\log(۱-\frac{x_i}{z})\right\}$$

$$=\exp\left\{\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}(\sum_{i=۱}^{r}x_i^n-\sum_{i=۱}^{r-۱}y_i^n)\frac{۱}{z^n}\right\}$$

$$=\exp\left\{\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{M_n(\tau_\lambda)}{n}\frac{۱}{z^n}\right\}$$

□

. به عنوان مثال با بررسی ظریب $\frac{1}{z}$ و $\frac{1}{z^{۲}}$ داریم:

$$M_{۱}(m_\lambda) = M_{۱}(\tau_\lambda) = ۰$$
$$M_{۲}(m_\lambda) = \frac{۱}{۲}(M_{۱}(\tau_\lambda)^{۲} + M_{۲}(\tau_\lambda)) = |\lambda|$$

تا به اینجا به هر عضو $\lambda \in \mathfrak{A}$ و در حالت خاص هر $\lambda \in \mathbb{Y}$ دو اندازه τ_λ و m_λ نسبت دادیم. اما مشخص نیست این اندازه ها چه ارتباطی به نمایش متناظر S_λ از S_n دارند. قضیه‌ای که بیان خواهیم کرد نشان می‌دهد این اعداد از روی مشخصه‌های نمایش به دست می‌آیند. قبل از بیان آن مقدماتی نیاز داریم.

فرض کنید $\mathbb{E}_n : \mathbb{C}[S_{n+۱}] \to \mathbb{C}[S_n]$ تابع خطی باشد که از گسترش زیر به دست می‌آید:

$$\mathbb{E}_n(g) = \begin{cases} g & g \in S_n \\ ۰ & g \notin S_n \end{cases}$$

به دست می‌آید. $J_n \in \mathbb{C}[S_{n+۱}]$ را نیز عضو جیسیس- مورفی بگیرید. از آنجا که J_n با هر عضو $\mathbb{C}[S_n]$ جابه‌جا می‌شود، برای هر k، $\mathbb{E}_n(J_n^k)$ عنصری در $Z(\mathbb{C}[S_n])$ است. می‌دانیم تمام نمایش های S_n در نمایش $\mathbb{C}[S_n]$ وجود دارند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\mathbb{C}[S_n] = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} End(V_\lambda)$$

به همین شکل:

$$\mathbb{C}[S_{n+۱}] = \oplus_{\lambda \in \mathbb{Y}_{n+۱}} End(V_\lambda)$$

برای هر $a \in \mathbb{C}[S_n]$، $tr_\lambda(a)$ را اثر عملگر a روی نمایش متناظر λ قرار دهید. برای هر $a \in \mathbb{C}[S_n]$، L_a را عملگر ضرب کردن از چپ روی $\mathbb{C}[S_n]$ بگیرید.

قضیه ۱۹.۳. (اثر): برای هر $a \in \mathbb{C}[S_n]$ داریم:

$$tr_\lambda(\mathbb{E}_n(J_n^k)) = \dim(\lambda)\ M_k(m_\lambda)$$

اثبات. فرض کنید $e_\lambda \in \mathbb{C}[S_n]$ عضوی باشد که L_{e_λ} روی V_λ همانی و روی V_μ برای $\lambda \neq \mu$ صفر باشد. اثر عملگر $\mathbb{E}_n(J_n^k)e_\lambda$ روی $\mathbb{C}[S_n]$ برابر است با:

$$\dim(\lambda).tr_\lambda(\mathbb{E}_n(J_n^k))$$

از طرف دیگر اگر برای $a \in \mathbb{C}[S_n]$ $(a)_e$ ضریب عنصر همانی S_n را در بسط a نشان دهد به راحتی دیده می‌شود $tr(L_a) = n!\ (a)_e$. در نتیجه: $tr_\lambda(\mathbb{E}_n(J_n^k)e_\lambda) = n!(\mathbb{E}_n(J_n^k)e_\lambda)_e$ از آنجا که $e_\lambda \in \mathbb{C}[S_n]$ $\mathbb{E}_n(J_n^k)e_\lambda = \mathbb{E}_n(J_n^k e_\lambda)$، بنابراین

$$(\mathbb{E}_n(J_n^k)e_\lambda)_e = (\mathbb{E}_n(J_n^k e_\lambda))_e = (J_n^k e_\lambda)_e$$

بنابراین باید ضریب e را در بسط $J_n^k e_\lambda$ در $\mathbb{C}[S_{n+1}]$ به دست آوریم. از آنجا که e_λ تنها روی V_Λ هایی که $\Lambda \nearrow \lambda$ ناصفر است (و روی آنها همانی است.) داریم:

$$(J_n^k e_\lambda)_e = \frac{tr_{\mathbb{C}[S_{n+1}]}(L_{J_n^k e_\lambda})}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\lambda\nearrow\Lambda} \dim(\Lambda) tr_\Lambda(J_n^k)$$

در نتیجه با جای‌گذاری تساوی های بالا داریم:

$$tr_\lambda(E(J_n^k)) = \frac{n!}{\dim(\lambda)}[\frac{1}{(n+1)!}\sum_{\lambda\nearrow\Lambda} \dim(\Lambda) tr_\Lambda(J_n^k)]$$

$$= \frac{1}{\dim(\lambda)(n+1)}\sum_{\lambda\nearrow\Lambda} \dim(\Lambda) tr_\Lambda(J_n^k)$$

$$= \sum_{\lambda\nearrow\Lambda} \frac{\dim(\Lambda)}{(n+1)\dim(\lambda)} tr_\Lambda(J_n^k)$$

فرض کنید $x_1 < y_1 < \cdots < x_{r-1} < y_{r-1} < x_r$ نقاط اکسترمم تابع شکسته λ باشند و Λ^s نمودار یانگی باشد که از قرار دادن یک مربع در نقطه متناظر x_s به دست می‌آید. در این صورت از لم (۵.۲.۳) J_n^k روی Λ^s به صورت x_s^k در ماتریس همانی است. در نتیجه: $trac_{\Lambda_s}(J_n^k) = x_s^k.\dim(\lambda)$ و بنابراین:

$$trac_\lambda(E(J_n^k)) = \sum_{\lambda\nearrow\Lambda^s} \frac{\dim(\Lambda^s)}{(n+1)\dim(\lambda)}.x_s^k.\dim(\lambda)$$

لم زیر اثبات قضیه را کامل می‌کند.

□

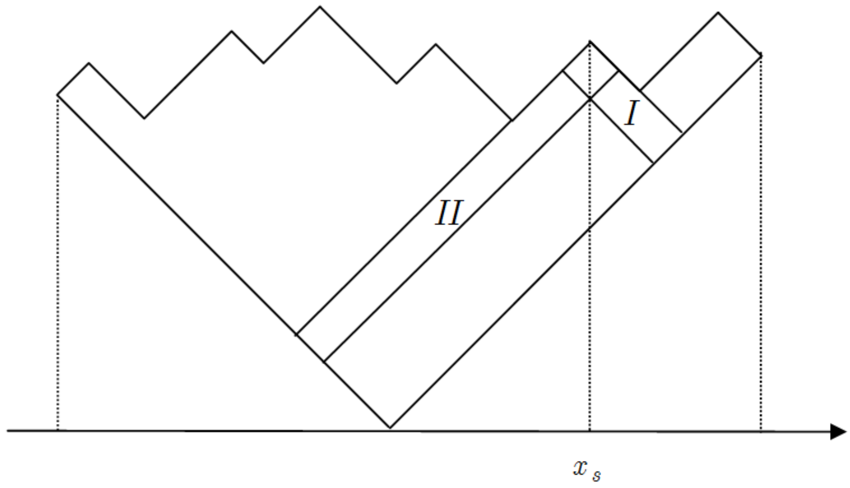
لم ۲۰.۳. با نمادهای بالا

$$\frac{\dim(\Lambda^s)}{(n+1)\dim(\lambda)} = m_\lambda(\{x_s\})$$

اثبات. با استفاده از فرمول هوک ۱۱.۳ سعی می‌کنیم طرف چپ را ساده کنیم. فرض کنید Λ^s از قرار دادن یک مربع در s امین مینیمم نمودار λ به دست آید. (شکل ۴.۳) بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\dim(\Lambda)}{(n+1)\dim(\lambda)} = \frac{\prod\limits_{b\in\lambda} h_\lambda(b)}{\prod\limits_{b\in\Lambda^s} h_{\Lambda^s}(b)}$$

تعداد زیادی از جملات حاصلضرب طرف راست با یکدیگر ساده می‌شوند و تنها جملات نظیر نقاط



I و II باقی می‌مانند که نشان می‌دهد:

$$\frac{\prod_{b\in\lambda} h_\lambda(b)}{\prod_{b\in\Lambda^s} h_{\Lambda^s}(b)} = \frac{\prod_{b\in I_1} h_\lambda(b)}{\prod_{b\in I_1} h_{\Lambda^s}(b)}\cdot\frac{\prod_{b\in I_2} h_\lambda(b)}{\prod_{b\in I_2} h_{\Lambda^s}(b)} = (\frac{x_s-y_1}{x_s-x_1}\cdots\frac{x_s-y_{s-1}}{x_s-x_{s-1}})(\frac{x_s-y_s}{x_s-x_s}\cdots\frac{x_s-y_{r-1}}{x_s-x_{r-1}})$$
$$= m_\lambda(\{x_s\})$$

□

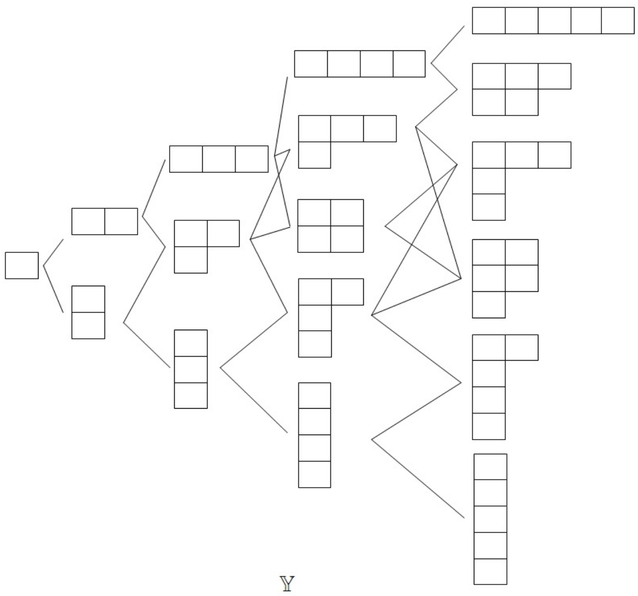
۵.۳. نحوه حدگیری نمودارهای یانگ

تاکنون به بررسی یک نمودار یانگ به تنهایی پرداختیم. اما آنچه برای بیان جملاتی نظیر "شکل حدی نمودار های یانگ" نیاز داریم ساختن یک فضای احتمال روی دنباله نمودارهای یانگ است، مانند آنچه در بیان قانون قوی اعداد بزرگ انجام می‌شود. در این قسمت سعی داریم مشابه این کار را برای نمودارهای یانگ پیاده‌سازی کنیم. در شکل بعدی نمودار های یانگ بر حسب اندازه آنها مرتب شده‌اند. فرض کنید Γ مجموعه مسیرهایی روی این شکل باشند که اندازه آنها در هر مرحله یک واحد زیاد می‌شود. یک عضو Γ نمایشی به صورت زیر دارد:

$$t = (\varnothing = t(0) \nearrow t(1) \nearrow \cdots \nearrow t(n) \nearrow \cdots)$$

که $t(n) \in \Gamma_n$ برای هر دنباله متناهی $u = (\varnothing = \lambda^0 \nearrow \lambda^1 \nearrow \cdots \nearrow \lambda^n)$، C_u را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_u = \{t \in \Gamma \,\big|\, t(i) = \lambda^i, i = 0, 1, \cdots, n\}$$



شکل ۳.۷.: درخت یانگ

Γ را به فضای فضای احتمالی با σ-میدان تولید شده توسط C_uها و اندازه احتمال $\mathbb{P}(C_u) = \frac{\dim(\lambda^n)}{n!}$ تبدیل می‌کنیم. سازگاری این اندازه احتمال‌ها از تساوی $\frac{\dim(\Lambda)}{n!} = \sum_{\lambda^n \nearrow \Lambda} \frac{\dim(\lambda^n)}{(n+1)!}$ به دست می‌آید. (لم ۲۰.۳) در نتیجه با قضایای توسیع می‌توان این اندازه را روی σ-میدان تولید شده با C_uها گسترش داد. به اندازه گسترش یافته، اندازه پلانچرال[۷] می‌گویند. نکته قابل توجه این است که با تعریف متغیر تصادفی X_n به شکل $X_n(t) = t(n)$ داریم: $\mathbb{P}(X_n = \lambda^n) = \frac{\dim(\lambda^n)^2}{n!}$ و این همان چیزی است که برای نشان دادن قضایای حدی نیاز داریم. (شکل ۷.۳)

۶.۳. نمودارهای پیوسته و توپولوژی روی نمودارهای یانگ

در این قسمت توابع پیوسته‌ای که از حدگیری توابع شکسته به دست می‌آید را تعریف می‌کنیم. این به ما کمک می‌کند بتوانیم حد نمودار های یانگ را که شکل پیوسته ای دارد در یک مجموعه بزرگ‌تر بررسی کنیم. سپس اندازه های ریله و انتقالی را روی توابع گسترش می‌دهیم.

تعریف ۲۱.۳. به یک تابع حقیقی ω نمودار پیوسته می‌گوییم اگر:

۱) $|\omega(x) - \omega(y)| \leq |x - y|$ برای هر $x, y \in \mathbb{R}$

۲) $\omega(x) = |x|$ اگر $|x|$ به اندازه کافی بزرگ باشد.

مجموعه نمودارهای پیوسته را با $\mathfrak{M}$ نشان می‌دهیم.

[۷] measure Plancherel

با استفاده از تعریف بدیهی است که: $\mathbb{Y} \subset \mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$ با تقریب نمودارهای شکسته دو اندازه ریله و انتقالی را می‌توان به نمودارهای پیوسته گسترش داد. برای $K > ۰$ قرار می‌دهیم:

$$\mathfrak{M}_K = \{\omega \in D \,|\omega(x) = |x|, |x| > K\}$$

و هر نمودار پیوسته در $\mathfrak{M}$ از جایی به بعد درون $\mathfrak{M}_K$ها قرار می‌گیرد. حال فرض کنید $\omega \in \mathfrak{M}_K$، دنباله $\omega_n \in \mathfrak{M}_K \bigcap \mathfrak{A}$ را می‌توان ساخت که با نرم یکنواخت به ω نزدیک شود. (زیرا کافیست ابتدا ω را با یک تابع قطعه قطعه خطی تقریب بزنیم و سپس چون شیب این قطعات از یک کمتر است، این توابع را با اعضای $\mathfrak{A}$ تقریب بزنیم.) توابع $\frac{\omega(x)-|x|}{۲}$ و $\frac{\omega_n(x)-|x|}{۲}$ تقریبا همه جا مشتق پذیر با مشتق کران دار و محمل فشرده هستند. ادعا می‌کنیم برای هر تابع پیوسته $f \in C[K, -K]$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\frac{\omega_n(x) - |x|}{۲})'dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\frac{\omega(x) - |x|}{۲})'dx$$

در واقع با انتگرال گیری جزء به جزء تساوی بالا برای توابع $f(x) = x^k$ برقرار است. (معادلا دنباله $\{M_k(\tau_{\omega_n}) : n = ۱, ۲, \cdots\}$ همگراست.) و در نتیجه با جمع آنها، این تساوی برای چندجمله‌ای‌ها ثابت می‌شود. حال کافیست به این نکته توجه کنید که چندجمله ای ها در $C[K, -K]$ چگال هستند.

با استفاده از قضیه ۱۸.۳از این که دنباله $\{M_k(\tau_{\omega_n}) : n = ۱, ۲, \cdots\}$ همگراست می‌توان نتیجه گرفت دنباله $\{M_k(m_{\omega_n}) : n = ۱, ۲, \cdots\}$ نیز همگراست. و در نتیجه دوباره با تقریب چندجمله‌ای‌ها دنباله

$$\{\int_{-K}^{+K} f(x)m_{\omega_n}(dx) : n = ۱, ۲, \cdots\}$$

برای توابع پیوسته در بازه $[K, -K]$ همگراست. این کلید گسترش اندازه انتقالی روی نمودارهای پیوسته است. قرار می‌دهیم $M(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{-K}^{+K} f(x)m_{\omega_n}(dx)$. می‌توان دید که M به دنباله خاص $\{\omega_n : n = ۱, ۲, \cdots\}$ بستگی ندار د و در نتیجه یک تابعک خطی روی توابع $C[K, -K]$ تعریف می‌کند. از آنجا نرم M کران دار است قضیه نمایش ریس در مورد توابع پیوسته وجود اندازه احتمال یکتای μ با محمل روی $[K, -K]$ را تضمین می‌کند که:

$$M(f) = \int_{-K}^{+K} f(x)\mu(dx)$$

به وضوح μ مستقل از K است. (مشروط بر این که محمل $\omega(x) - |x|$ حداقل شامل $[-K, K]$ شود.)
$\mu = m_\omega$ را اندازه گسترش یافته انتقالی برای $\omega \in \mathfrak{M}$ در نظر می‌گیریم.

مثال ۲۲.۳. فرض کنید $a > ۰$ و نمودار ω به شکل زیر تعریف شده باشد

$$\omega(x) = \begin{cases} a & |x| \leq a \\ |x| & |x| \geq a \end{cases}$$

ω را می‌توان با توابع شکسته ω_n که نقاط ماکزیممش $\{-a + \frac{۲a}{n}i \quad : \quad i = ۰, ۱, \cdots, n\}$ و مینیممش $\{-a + \frac{۲a}{n}i + \frac{a}{n} \quad : \quad i = ۰, ۱, \cdots, n-۱\}$ است تقریب زد. با محاسبه حد و استفاده از فرمول استرلینگ مشاهده می‌کنیم:

$$\tau_\omega = \frac{\delta_{-a} + \delta_a}{۲}, \qquad m_\omega = \frac{۱}{\pi\sqrt{a^۲ - x^۲}}$$

مثال ۲۳.۳. فرض کنید تابع $\Omega \in \mathfrak{M}$ به این‌گونه تعریف شده باشد:

$$\Omega(x) = \begin{cases} \frac{۲}{\pi}(x\, arc\sin\frac{x}{۲} + \sqrt{۴ - x^۲}) & |x| \leq ۲ \\ |x| & |x| > ۲ \end{cases}$$

در قسمت های بعد خواهیم دید این همان تابع حدی نمودار های یانگ است. محمل توزیع‌های τ_Ω و m_Ω در بازه $[-۲, ۲]$ است و روی این بازه برابرند با:

$$\frac{d\tau_\Omega}{dx} = \frac{۱}{\pi\sqrt{۴ - x^۲}}$$

$$\frac{dm_\Omega}{dx} = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{۴ - x^۲}$$

و گشتاورهای توزیع m_Ω برابرند با:

$$M_k(\tau_\Omega) = \begin{cases} \binom{۲p}{p} & k = ۲p, \quad p \in \mathbb{N} \\ ۰ & \end{cases}$$

روی نمودارهای پیوسته می‌توان دو توپولوژی گذاشت. توپولوژی اول با متر یکنواخت به دست می‌آید که به شکل زیر تعریف می‌شود:

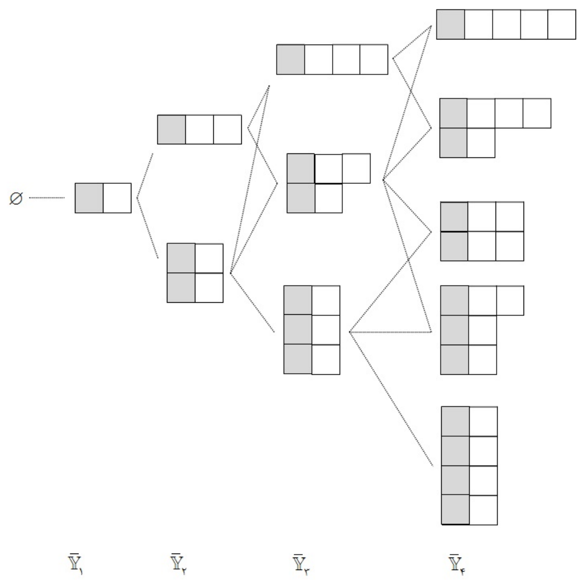
$$d(\omega_۱, \omega_۲) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\omega_۱(x) - \omega_۲(x)|$$

و توپولوژی دوم کوچکترین توپولوژی است که با شبه‌مترهای زیر به دست آید:

$$d_k(\omega_۱, \omega_۲) = |M_k(m_{\omega_۱}) - M_k(m_{\omega_۲})| \quad , k = ۱, ۲, \cdots$$

گزاره زیر را می‌توان با تقریب توابع پیوسته با چند جمله‌ای‌ها اثبات کرد.

قضیه ۲۴.۳. فرض کنید $K > ۰$ عددی ثابت است. دو توپولوژی بالا روی $\mathfrak{M}_K$ یکی هستند.



شکل ۳.۸.: نمودارهای $\bar{\mathbb{Y}}$

۳.۷. جایگشتهای مجموعه نامتناهی

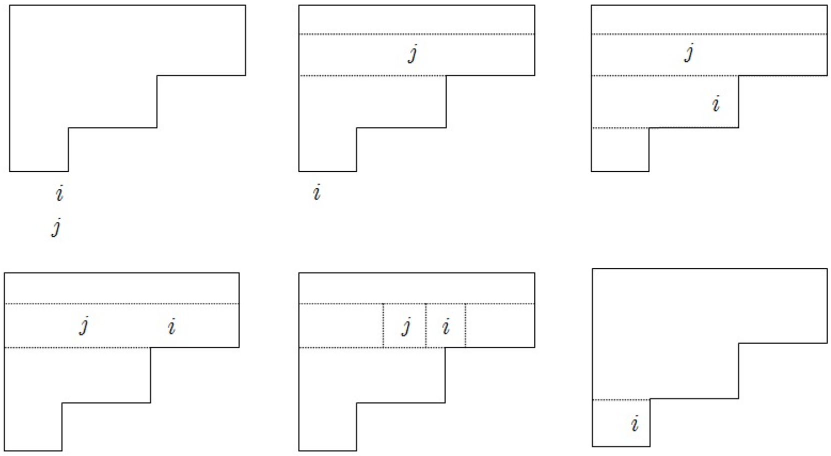
S_∞ را جایگشت‌هایی روی اعداد طبیعی در نظر می‌گیریم که فقط جایگاه متناهی عدد را عوض می‌کنند. این مجموعه با عمل ترکیب جایگشت‌ها یک گروه می‌شود و اعضای آن در تناظر با $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ هستند. گروه‌های تزویجی S_∞ را می‌توان همچنان با نمودار های یانگ نمایش داد اما چون هر عضو از جایی به بعد همانی است، گروه دوری متناظر آن نامتناهی دور یک عضوی دارد. به همین دلیل مناسب‌تر است دورهای یک عضوی را حذف کنیم و مابقی را با یک نمودار یانگ نشان دهیم. بنابراین گروه‌های تزویجی را با نمودارهای یانگ بدون ستون‌های یک خانه‌ای نشان می‌دهیم و نماد $\bar{\mathbb{Y}}$ را برای آن‌ها به کار می‌بریم:

$$\bar{\mathbb{Y}} = \{\rho \in \mathbb{Y} : m_1(\rho) = 0\}$$

فرض کنید $l(\rho)$ نشان دهنده حداقل تعداد ترانهشت‌هایی است که برای ساخت جایگشت $\sigma \in S_\infty$ با نمودار ρ لازم است. از آنجا که برای به دست آوردن دورهای به طول k، $k-1$ ترانهشت نیاز داریم:

$$l(\rho) = |\rho| - row(\rho)$$

نمودارهای $\bar{\mathbb{Y}}$ را می‌توانیم در یک جدول نشان دهیم طوری که نمودارهای با l برابر در یک ردیف قرار گیرند. (شکل ۳.۸) توجه کنید که $l(\rho) = l(\rho')$ لزوما نتیجه نمی‌دهد $|\rho| = |\rho'|$ و از این رو این جدول با جدولی که برای $\mathbb{Y}$ ساختیم متفاوت است. با حذف دورهای به طول یک، هر $\sigma \in S_n$ نمودای در $\bar{\mathbb{Y}}$ دارد که با



شکل ۹.۳.: حالت‌های مختلف قرار گرفتن دو عدد در تابلوی یانگ

$\rho = type(\sigma)$ نشان می‌دهیم. دو نمودار $\rho, \rho' \in \bar{\mathbb{Y}}$ را با یک خط به یکدیگر وصل می‌کنیم اگر دو جایگشت σو σ' پیدا شوند که $\rho = type(\sigma)$و $\rho' = type(\sigma')$ و σ, σ' با ترکیب یک ترانهشت از روی یکدیگر به دست آید.

قضیه ۲۵.۳. فرض کنید $x, (i,j) \in S_n$ و $\rho = type(x)$, $\rho' = type((i,j)x)$. در این صورت یا $l(\rho') = l(\rho) + ۱$ و یا $l(\rho') = l(\rho) - ۱$.

اثبات. دورهای بزرگتر از یک جایگشت x می‌تواند صفر، یک و یا دو تا از i و j را داشته باشد. بسته به این موضوع و این که این دو عضو در کجای جایگشت آمده باشند می‌توان نمودار ρ' را تعیین کرد. در شکل ۹.۳ تمام ۶ حالت رسم شده است. در سه حالت بالا $l(\rho')$ یک واحد زیاد می‌شود و در سه حالت پایین یک واحد کم می‌شود. در قضیه قبل به حالت‌هایی که یک واحد زیاد می‌شود بالا و به حالات دیگر پایین می‌گوییم.
□

۸.۳. گشتاورهای جیسیس-مورفی

در این قسمت علاقمند هستیم گشتاورهای جیسیس- مورفی را حساب کنیم. با بسط زیر شروع می‌کنیم:

$$J_n^k = \sum_{i_۱, \cdots i_k \in \{۱, \cdots, n\}} (i_k, n+۱) \cdots (i_۲, n+۱)(i_۱, n+۱)$$

به دنباله $(i_۱, i_۲, \cdots, i_k)$ دسترس‌پذیر می‌گوییم هرگاه $(i_k, n+۱) \cdots (i_۱, n+۱) \in S_n$. به هرمسیر

$$e \to (i_۱, n+۱) \to \cdots \to (i_k, n+۱) \cdots (i_۱, n+۱)$$

در گراف کیلی S_{n+1} مسیر

$$\varnothing \to \rho_1 \to \cdots \to \rho_k$$

را در $\bar{\mathbb{Y}}$ نظیر می‌کنیم که

$$\rho_j = type((i_j, n+1)\cdots(i_1, n+1))$$

توجه کنید که $l(\rho_{j+1}) = l(\rho_j) \pm 1$

تعریف ۲۶.۳. قرار می‌دهیم

$$\bar{\mathbb{Y}}_k = \bar{\mathbb{Y}} \cap \mathbb{Y}_k = \{\sigma \in \mathbb{Y} : m_1(\sigma) = 0, |\sigma| = k\}$$

برای $\sigma \in \bar{\mathbb{Y}}$, σ° نموداری است که با حذف ستون اول و مربع‌های تکی باقیمانده آن به دست می‌آید.

لم ۲۷.۳. فرض کنید $\rho \in \bar{\mathbb{Y}}$ و $k = 1, 2, \cdots$ سه شرط زیر معادل هستند:
۱) عدد طبیعی n و دنباله دسترس‌پذیر $i_1, i_2, \cdots, i_k$ وجود دارد که:

$$\rho = type((i_k, n+1)\cdots(i_1, n+1))$$

۲) $l(\rho) \equiv k \pmod 2$ و $|\rho| + row(\rho) \leq k$
۳) برای یک $\sigma^\circ \in \bar{\mathbb{Y}}_k$ ، $\rho = \sigma^\circ$

اثبات. تعداد بارهای که l یک واحد زیاد می‌شود را u و بارهایی که یک واحد کم می‌شود را d بنامید. در نتیجه $u + d = k$ و $u - d = l(\rho)$ و:

$$u = \frac{k + l(\rho)}{2}, \quad d = \frac{k - l(\rho)}{2}$$

اما از آن‌جا که تنها در حالتی سطرهای نمودار بیشتر می‌شود که l یک واحد کم شود (به قضیه ۲۵.۳ نگاه بیندازید):

$$row(\rho) \leq d = \frac{k - l(\rho)}{2} \quad \Rightarrow$$
$$k \geq l(\rho) + 2row(\rho) = |\rho| + row(\rho)$$

که به این شکل از گزاره ۱ به ۲ می‌رسیم. از طرف دیگر اگر ρ نموداری با شرط‌های گزاره ۲ باشد می‌توان دنباله‌ی دسترس‌پذیری برای ساخت آن ارائه داد. فرض کنید $(\rho_1 \geq \rho_2 \geq \cdots \geq \rho_{row(\rho)})$ ستون‌های ρ باشند. ابتدا اعداد متمایز $i_1, i_2, \cdots, i_{\rho_1} \in \{1, \cdots, n\}$ را انتخاب می‌کنیم. با فرض $i_{\rho_1+1} = i_1$:

$$(i_1, n+1)(i_2, n+1)\cdots(i_{\rho_1+1}, n+1) = (i_1, i_2, \cdots, i_{\rho_1}) \in S_n$$

حال دوباره اعداد متمایز $j_1, j_2, \cdots, j_{\rho_2} \in \{1, \cdots, n\}\backslash\{i_1, i_2, \cdots, i_{\rho_1}\}$ را انتخاب می‌کنیم و با آن دور ρ_2 را می‌سازیم. به همین شکل تمام ρ_i ها را می‌سازیم. توجه کنید که این کار انجام پذیر است زیرا کل اعداد متمایزی که انتخاب می‌شوند برابراند با

$$(\rho_1 + 1) + +(\rho_{row(\rho)} + 1) = |\rho| + row(\rho) \leq k$$

معادل بودن ۲ و ۳ از تعریف واضح است.

با توجه به این‌که $\mathbb{E}_n(J_n^k)$ عضوی از $Z(\mathbb{C}[S_n])$ است، لم بالا نشان می‌دهد:

$$\mathbb{E}_n(J_n^k) = \sum_{\sigma \in \bar{\mathbb{Y}}_k} K_{\sigma;n} A_{\sigma^\circ \cup (1^{n-|\sigma^\circ|})}$$

که $K_{\sigma;n}$ ها اعداد صحیح و نامنفی هستند و $A_{\sigma^\circ \cup (1^{n-|\sigma^\circ|})}$ مجموع دسته تزویجی جایگشت‌های با نمودار $\sigma^\circ \cup (1^{n-|\sigma^\circ|})$ هستند. در واقع $K_{\sigma;n}$ تکرر این جملات در بسط $\mathbb{E}_n(J_n^k)$ است.

□

قضیه ۲۸.۳. ضریب $K_{\sigma;n}$ در $\mathbb{E}_n(J_n^k)$ از مرتبه $n^{m_2(\sigma)}$ است. به این معنا که نسبت آن‌ها وقتی n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند به یک عدد ثابت می‌رود.

اثبات. بار دیگر به استدلال لم ۲۷.۳ توجه کنید. برای نشان دادن معادل بودن گزاره‌های ۱ و ۲ روشی برای به دست آوردن نمودار $\sigma = (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{row(\sigma)})$ توسط جایگشت‌ها ارائه دادیم. از لحاظ مرتبه، جایگشت‌هایی که به این شکل در نظر گرفته می‌شوند با کل جایگشت‌های سازنده $A_{\sigma^\circ \cup (1^{n-|\sigma^\circ|})}$ برابرند. این نتیجه می‌دهد که کافیست کل درجات آزادی در ساخت این جایگشت‌ها شمرده شود. این عدد برابر $\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_{row(\sigma)} = \frac{|\sigma| + l(\sigma^\circ)}{2}$ است و بنابراین تعداد این جایگشت‌ها از مرتبه $n^{\frac{|\sigma|+l(\sigma^\circ)}{2}}$ است. اما چون $A_{\sigma^\circ \cup (1^{n-|\sigma^\circ|})}$ ، $n^{|\sigma^\circ|}$ جمله دارد باید عدد اخیر را بر $n^{|\sigma^\circ|}$ تقسیم کنیم که حاصل $n^{m_2(\sigma)}$ می‌شود. □

قضیه ۲۹.۳.
$$\delta_e(J_n^k) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{k}{2}+1}\binom{k}{\frac{k}{2}} + O(n^{k/2-1}) & k \in 2\mathbb{Z} \\ 0 & k \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

اثبات. باید تعداد مسیرهای دسترس‌پذیر با طول k را بشماریم که از $\varnothing$ شروع و به آن ختم می‌شوند. در این مسیرها هر ترانهشت باید زوج بار ظاهر شود. در نتیجه این تعداد برای k فرد صفر است. از طرف دیگر اگر k زوج باشد بیشترین تعداد مسیرهای دسترس‌پذیر وقتی است که هر ترانهشت دقیقا دو بار ظاهر شود. (مابقی حداکثر $\frac{k}{2} - 1$ عضو مختلف دارند و در نتیجه تعداد آن‌ها از مرتبه $n^{\frac{k}{2}-1}$ است.) درنتیجه تعداد مسیرهای دسترس‌پذیر که از $\varnothing$ شروع و به آن ختم می‌شود برابر عدد کاتالانن است که در بالا آمده است. □

قضیه ۳۰.۳. مولفه e در $\mathbb{E}(J_n^k)^2$ برابر است با: $\delta_e(\mathbb{E}(J_n^k)^2) - \delta_e(J_n^k)^2 = O(n^{k-1})$

اثبات.

$$\sum_{\sigma\in YYK} K^{۲}_{\sigma:n}\left|C_{\sigma^{\circ}\cup(۱^{n-|\sigma^{\circ}|})}\right| = \sum_{\sigma\in\bar{\mathbb{Y}}_k} c_\sigma n^{۲m_۲(\sigma)} n^{|\sigma^{\circ}|}(۱+O(n^{-۱}))$$
$$= \sum_{\sigma\in\bar{\mathbb{Y}}_k} c_\sigma n^{l(\sigma)+۲m_۲(\sigma)}(۱+O(n^{-۱}))$$

که ثابت c_σ مستقل از n است. برای $\sigma\in\bar{\mathbb{Y}}_k$ تساوی $l(\sigma)+m_۲(\sigma)=k$ معادل زوج بودن k و $\sigma=(۲^{\frac{k}{۲}})$ است. (برای مابقی σها $l(\sigma)+m_۲(\sigma)\le k-۱$) در نتیجه در بسط J_n^k تنها کافیست جملاتی که به شکل $(i_۱,i_۲)\cdots(i_{k-۱},i_k)$ تجزیه می‌شوند شمرده شوند. (تعداد مابقی جملات از مرتبه $n^{k-۱}$ است) در این جملات $n+۱$ نمی‌تواند ظاهر شود و در نتیجه تحت نگاشت $\mathbb{E}_n$ ثابت می‌مانند که این حکم را ثابت می‌کند. $\square$

۹.۳. قانون ضعیف همگرایی نمودارهای یانگ

در این بخش قضیه زیر را ثابت می‌کنیم:

قضیه ۳۱.۳. (قانون ضعیف همگرایی برای نمودارهای یانگ): برای هر $\varepsilon>۰$ و $k=۱,۲,\cdots$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\{t:\left|M_k(m_{t(n)^{\sqrt{n}}})-M_k(m_\Omega)\right|\ge\varepsilon\})=۰$$

اثبات. با استفاده لم قبل و محاسبه گشتاورهای m_Ω و $\delta_e(J_n^k)$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\delta_e((\mathbb{E}(J_n^k)-n^{k/۲}M_k(m_\Omega))^{۲})=\\
&\delta_e((\mathbb{E}(J_n^k)^{۲}-۲\delta_e(J_n^k)n^{k/۲}M_k(m_\Omega)+n^kM_k(m_\Omega)^{۲})=\\
&\delta_e(J_n^k)^{۲}+O(n^{k-۱})-۲\delta_e(J_n^k)n^{k/۲}M_k(m_\Omega)+n^kM_k(m_\Omega)^{۲}=\\
&O(n^{k-۱})
\end{aligned}$$

با بررسی ضریب همانی عملگرها در بسط $\mathbb{C}[S_n]=\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Y}_n}End(V_\lambda)$ داریم:

$$\delta_e(\cdot)=\sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n}\tfrac{\dim(\lambda)}{n!}tr_\lambda(\cdot)$$

و در نتیجه:

$$\begin{aligned}
&\delta_e((\mathbb{E}(J_n^k) - n^{k/۲}M_k(m_\Omega))^{۲}) = \\
&\sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n} \frac{\dim(\lambda)^{۲}}{n!}\, tr_\lambda((\mathbb{E}(J_n^k) - n^{k/۲}M_k(m_\Omega))^{۲}) = \\
&\sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n} \frac{\dim(\lambda)^{۲}}{n!}\, tr_\lambda(\mathbb{E}(J_n^k) - n^{k/۲}M_k(m_\Omega))^{۲} = \\
&\sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n} \frac{\dim(\lambda)^{۲}}{n!}\, (M_k(m_\lambda) - n^{k/۲}M_k(m_\Omega))^{۲}
\end{aligned}$$

(توجه کنید که برای$a \in Z(\mathbb{C}[S_n])$, $tr_\lambda(a^{۲}) = tr_\lambda(a)^{۲}$) پس:

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n} \frac{\dim(\lambda)^{۲}}{n!}\, (M_k(m_\lambda) - n^{k/۲}M_k(m_\Omega))^{۲} = O(n^{-۱})$$

که با نامساوی چبیشف و $n^{k/۲}M_k(m_\Omega) = M_k(m_{\lambda\sqrt{n}})$ قانون ضعیف را نتیجه می‌دهد. $\square$

۱۰.۳. قانون قوی نمودارهای یانگ

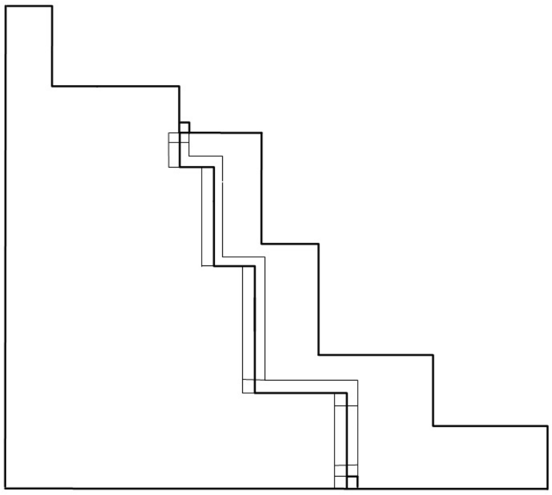
مشابه استدلال قانون قوی اعداد بزرگ برای حالتی که گشتاورها متناهی باشد، می‌توان قانون زیر را برای نمودارهای یانگ ثابت نمود:

قضیه ۳۲.۳. (قانون قوی همگرایی نمودارهای یانگ): فرض کنید k یک عدد طبیعی است. در این صورت برای تقریبا هر مسیر $t = (\varnothing = t(۰) \nearrow t(۱) \nearrow \cdots \nearrow t(n) \nearrow \cdots)$ در Γ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} |M_k(m_{t(n)\sqrt{n}}) - M_k(m_\Omega)| = ۰$$

ما در این‌جا اثبات این حکم را نمی‌آوریم ولی سعی می‌کنیم ارتباط آن را به جایگشت‌های تصادفی بیان کنیم. همان طور که در بخش شرح دادیم یک روش برای ساخت یک جایگشت تصادفی، قرار دادن اعداد به طور متوالی در بین جایگشت مرحله قبل است. اثبات می‌کنیم اگر به نمودارهای یانگ متناظر آن‌ها نگاه کنیم، فرایندی که به این شکل ساخته می‌شود همان فرایندی است که روی نمودارهای یانگ ساختیم. یکی از نتایج این تناظر این است که نشان می‌دهد ۲ $= \lim_{n\to\infty} \frac{L_n(\sigma^n)}{\sqrt{n}}$ (تقریبا به ازای هر دنباله $\{\sigma^n\}_{n=۱}^{\infty}$ از جایگشت‌ها)

ادعای بالا را اثبات می‌کنیم. فرض کنید λ و Λ دو نمودار یانگ باشند که $\lambda \nearrow \Lambda$ و $|\lambda| = n$. A_λ را مجموعه جایگشت‌هایی از S_n در نظر می‌گیریم که با تناظر رابینسون- شنستد به نمودار λ می‌روند و A_Λ را مجموعه جایگشت‌هایی در $S_{n+۱}$ بگیرید که با افزودن $n+۱$ به یک جایگشت در A_λ به دست می‌آید و نمودار



شکل ۳.۱۰.: نحوه جابجایی اعداد

آن با تناظر رابینسون- شنستد Λ باشد. باید ثابت کرد $\frac{\#A_\Lambda}{(n+1)\#A_\lambda}$ همان احتمال گذر از نمودار λ به Λ و یا $\frac{\dim(\Lambda)}{(n+1)\dim(\lambda)}$ است.

فرض کنید $\sigma \in A_\lambda$. ادعا می‌کنیم با دانستن $Q(\sigma)$ به تنهایی می‌توان مشخص کرد که آیا با اضافه کردن $n+1$ به σ جایگشت جدید عضوی از A_Λ است یا خیر. به عبارت دیگر با دانستن اینکه $n+1$ در کدام مرحله به σ اضافه می‌شود و $Q(\sigma)$ می‌توان نمودار Q جایگشت جدید را به دست آورد. برای چک کردن این ادعا تناظر $\sigma \to (P(\sigma), Q(\sigma))$ را دوباره بررسی کنید. تاکنون حداقل نتیجه می‌گیریم A_Λ مضربی از $\dim(\lambda)$ است (زیرا روی $P(\sigma)$ آزادی عمل داریم) بنابراین برای اثبات تساوی $\#A_\Lambda = \dim(\lambda).\dim(\Lambda)$ باید یک تناظر بین نمودارهای استاندارد یانگی که شکل Λ دارند جایگشت‌های σ با خاصیت بالا به دست آوریم.

در شکل ۳.۱۰ یک نمودار یانگ کشیده شده است. فرض کنید وقتی عدد $n+1$ را به جایگشتی که $Q(\sigma)$ را می‌سازد اضافه می‌کنیم این عدد برای اولین بار در پایین‌ترین مربع نمودار ظاهر شود و با اضافه کردن اعداد بعدی این عدد روی مسیر کشیده شده بالا رود. نکته مهم این است که با دانستن ترتیب بزرگتر و کوچکتری اعداد روی مسیر کشیده شده می‌توان پی برد عدد در نهایت روی کدام خانه نمودار قرار می‌گیرد. و در پایان برای ساخت تناظر مربع‌های روی این مسیر پله‌ای را یک واحد جابجا کنید طوری که هر مربع یا به مربع پایین خود برود و یا مربع سمت راستش و مربع $n+1$ نیز حذف شود.

آ. ضمیمه

آ.۱. نظریه نمایش

قبل از آن که نظریه گروه‌ها شکل گیرد ریاضیدانان تصوری هندسی از این مفهوم داشتند که معمولا با تقارن‌های یک شی بیان می‌شد. به عنوان مثال برای بیان گروه جایگشت‌های $S_۴$ می‌توانیم تبدیل‌های خطی را در نظر بگیریم که یک هرم را ثابت نگه می‌دارد. در واقع در پشت این نمایش گروه نگاشت‌های خطی با عمل ترکیب آن‌ها قرار دارد که به علت غنای زیاد خود، هر گروهی در آن قابل بیان است. بعدها به موازات معرفی نظریه گروه‌ها، نظریه نمایش شکل گرفت که اکنون در ریاضیات و فیزیک جایگاه مهمی‌دارد. در این قسمت مبانی این نظریه را بیان می‌کنیم.

یک نمایش از گروه متناهی G در یک فضای برداری متناهی بعدی V (روی $\mathbb{C}$) همیومورفیسم $\rho : G \to GL(V)$ از گروه G به گروه خودریختی های V است. این نگاشت یک ساختار G-مدول روی V می‌دهد. زیرا به هر عضو $g \in G$ روی V نگاشتی خطی می‌دهد که $v \in V$ را به $\rho(g)(v)$ یا به شکل خلاصه تر $g.v$ می‌فرستد. در صورتی که ابهامی پیش نیاید به V نمایش G می‌گوییم. مشابه عملیات روی مدول‌ها، می‌توان دو نمایش را با هم جمع مستقیم کرد یا تانسور کرد و در صورت امکان خارج قسمت گرفت. یک نمایش V بدیهی نامیده می‌شود هرگاه $\dim_{\mathbb{C}}(V) = ۱$ و نگاشت $\rho(G)$ برای هر $\rho \in G$ همانی باشد. یکی از مهمترین مثال‌های نمایش یک گروه، $\mathbb{C}[G]$ و یا فضای برداری آزاد تولید شده توسط اعضای G روی $\mathbb{C}$ است. هر عضو G از چپ (یا راست) می‌تواند روی آن عمل کند.

تعریف آ.۱. نمایش V از گروه G تحویل‌ناپذیر خوانده می‌شود اگر در هر تجزیه آن به جمع مستقیم دو نمایش، حداقل یکی از آنها بدیهی باشد. قضیه زیر یکی از اساسی‌ترین قضیه‌ها در نظریه نمایش است:

قضیه آ.۲. قضیه اول شور: فرض کنید V یک نمایش از گروه G باشد که زیر فضای $W \subseteq V$ از آن ناوردا باشد. (به عبارت دیگر برای هر $g \in G$ و $w \in W$، $\rho(g)(w) \in W$) در این صورت زیر فضای مکمل ناوردای W' برای W وجود دارد: $V = W \oplus W'$

اثبات. ضرب داخلی دلخواهی مانند H روی V قرار دهید و ضرب داخلی زیر را با میانگین گیری از آن بسازید:

$$H'(v, w) = \sum_{g \in G} H(g.v, g.w)$$

این ضرب داخلی نسبت به G ناورداست. (به عبارت دیگر برای هر $v\ ,w \in W$ و $g \in G$، $H(g.v, g.w) =$) W' ($H(v,w)$ را مکمل عمود نسبت به آن بگیرید. اثبات می‌کنیم W' ناورداست. فرض کنید $w \in W'$. باید نشان داد برای هر $g \in G$، $g.w \in W'$ و یا معادلا اگر $v \in W$ آنگاه $H'(v, g.w) = ۰$. بخاطر ناوردایی ضرب داخلی عبارت اخیر برابر است با $H'(g^{-۱}.v, w)$ که با توجه به این w در W' است، برابر با صفر است و حکم اثبات می‌شود. $\square$

نتیجه آ.۳. هر نمایشی را می‌توان به شکل جمع مستقیم‌ای از نمایش‌های تحویل ناپذیر نوشت.

قضیه آ.۴. قضیه دوم شور: فرض کنید V وW دو نمایش تحویل ناپذیر گروه G و $\varphi : V \to W$ نگاشتی $G-$مدول بین آنها باشد (در نظریه نمایش عموما نگاشت‌های مدول، حافظ عمل گروه هستند.) در این صورت:
۱) اگر $V = W$، $\varphi = \lambda.I$ که $\lambda \in \mathbb{C}$ و I نگاشت همانی است.
۲) اگر $V \neq W$ ،همواره $\varphi = ۰$.

اثبات. ۱) فرض کنید $V = W$. برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ ، $\ker(\varphi - \lambda.I)$ و$\mathrm{Im}(\varphi - \lambda.I)$ دو زیر فضای ناوردا از V و W (به ترتیب) و در نتیجه چون این دو نمایش تحویل‌ناپذیرند یا زیرفضای صفر و یا کل فضا هستند. در نتیجه φ تنها یک مقدار ویژه دارد و بنابراین مضربی از همانی است.
۲) چون φ یک $G-$مدول است، هسته آن یک زیر فضای خطی V است. ولی می‌دانیم V تحویل ناپذیر است. در نتیجه این هسته یا بدیهی یا کل V است. درحالت دوم مساله ثابت می‌شود. پس فرض کنید هسته نگاشت بدیهی باشد، یعنی φ یک به یک است. مشابه همین استدلال در مورد تصویر φ نتیجه می‌دهد که این نگاشت پوشاست. در نتیجه φ یک ایزومرفیسم می‌شود. و این با $V \neq W$ در تناقض است. $\square$

نتیجه آ.۵. هر نمایش V تجزیه یکتایی به شکل زیر دارد: $V = V_۱^{a_۱} \oplus \cdots \oplus V_n^{a_n}$ که V_i ها نمایش‌های تحویل ناپذیراند و $V_i^{a_i} = \underbrace{V_i \oplus \cdots \oplus V_i}_{a_i}$.

نتیجه آ.۶. فرض کنید V نمایشی تحویل ناپذیر و W نمایشی دل‌خواه از گروه G و $\varphi : V \to W$ نگاشتی Gمدول بین آنها باشد. در این صورت این نگاشت ناصفر است اگر V در بسط W ظاهر شود.

قضایای شور بررسی نمایش‌های یک گروه را به دو سوال زیر محدود می‌کند:
۱) شناسایی تمام نمایش‌های تحویل‌ناپذیر
۲) به دست آوردن نمایش‌های V_i و ضرایب a_i برای یک نمایش V
در ادامه ابزارهایی برای بررسی این دو سوال معرفی می‌کنیم.

آ.۲. مشخصه‌های یک نمایش

همانطور که تاکنون دیدیم در یک نمایش V ، هر $g \in G$ نگاشتی خطی روی V می‌سازد. مشخصه این عضو را اثر این نگاشت تعریف می‌کنیم: $\chi_V(g) = tr(g : V \to V)$. از آن‌جا که نگاشت‌های متناظر دو عضو

یک کلاس تزویجی با یکدیگر مزدوج هستند، مشخصه روی کلاس‌های تزویجی تعریف شده‌است.

قضیه آ.۷. فرض کنید V و W دو نمایش باشند. در این صورت:

۱) $\chi_{V\oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g)$

۲) $\chi_{V\otimes W}(g) = \chi_V(g).\chi_W(g)$

۳) $\chi_{V^*}(g) = \overline{\chi}_V(g)$

اثبات. بدیهی است. □

نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$\varphi = \frac{۱}{|G|}\sum_{g\in G} g \in End(V)$$

تصویر این نگاشت $V_{stab} = \{v \in V : \forall g \in G\ ,\quad g.v = v\}$ است و φ روی این مجموعه ثابت است. در نتیجه φ یک نگاشت افکنش است.

قضیه آ.۸. $\frac{۱}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\chi_g = \dim(V_{stab})$

اثبات. کافسیت اثر φ را محاسبه کنیم. □

فرض کنید V و W دو نمایش و $Hom_G(V,W)$ مجموعه تمام نگاشت‌های G مدول از V به W باشد. این فضایی خطی است و علاوه بر این چون هر نگاشت G مدولی را می‌توان در یک عضو گروه ضرب کرد این فضا نمایشی از G است.(این نمایش همان$W \otimes V^*$ است.) با فرض تحویل‌ناپذیریV از نتیجه بالا به دست می‌آید $Hom_G(V,W)$ بعدی برابر توان V در بسط W به نمایش‌های تحویل‌ناپذیر دارد و در نتیجه با قضیه بالا این بعد برابر است با:

$$\frac{۱}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V^*\otimes W}(g) = \frac{۱}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi}_V(g).\chi_W(g)$$

در حالت خاص که V و W هر دو تحویل ناپذیر باشند و$V \neq W$ داریم:

$$\frac{۱}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V^*\otimes W}(g) = \frac{۱}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi}_V(g).\chi_W(g) = ۰$$

و اگر $V = W$:

$$\frac{۱}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V^*\otimes V}(g) = \frac{۱}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi}_V(g).\chi_V(g) = ۱$$

و در نتیجه اگر به هر نمایش تحویل‌ناپذیر از G بردار مشخصه را نسبت دهیم این بردارها برای نمایش‌های مختلف متعامد می‌شوند. و با توجه به این‌که این بردارها $|G|$ مولفه دارند نتیجه می‌شود تعداد نمایش‌های تحویل‌ناپذیر گروه حداکثر به تعداد $|G|$ است. علاوه بر این چون مشخصه روی کلاس‌های تزویجی ثابت است، تعداد نمایش‌های تحویل‌ناپذیر حداکثر به تعداد کلاس‌های تزویجی خواهد شد. این نکته مساله دوم نظریه نمایش را که به دست آوردن اعداد a_i در بسط $V = V_۱^{a_۱} \oplus \cdots \oplus V_n{}^{a_n}$ است, حل می‌کند. زیرا:

$$a_i = \frac{۱}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi}_V(g) . \chi_{V_i}(g)$$

همانطور که گفتیم یکی از نمایش‌های گروه G , $\mathbb{C}[G]$ است. می‌توان دید $\chi_V(g)$ تنها وقتی ناصفر است که $g = id$ و در این حالت $\chi_{id} = |G|$. و در نتیجه با جایگذاری در تساوی بالا:

$$a_i = \chi_{V_i}(id) = \dim(V_i)$$

بنابراین:

$$\mathbb{C}[G] = V_۱^{\dim(V_۱)} \oplus \cdots \oplus V_n{}^{\dim(V_n)}$$

و در نتیجه با محاسبه بعد عبارت بالا:

$$|G| = \sum \dim\left(V_i\right)^۲$$

که سری روی تمام نمایش‌های تحویل‌ناپذیر بسته شده است.

نتیجه آ.۹. در حالتی که $G = S_n$ تساوی بالا همان $\sum_{\lambda} \dim\left(S_\lambda\right)^۲ = n!$ است که در این پایان‌نامه بارها با آن برخورد کردیم.

اما تاکنون می‌دانیم تعدادنمایش‌های تحویل ناپذیر یک گروه حداکثر برابر تعداد کلاس‌های تزویجی آن است. در انتها عکس این موضوع را نشان می‌دهیم.

قضیه آ.۱۰. تعدادنمایش‌های تحویل ناپذیر یک گروه دقیقا برابر تعداد کلاس‌های تزویجی آن است.

اثبات. کافیست ثابت کنیم برای هر نگاشت $\alpha : G \to \mathbb{C}$ که روی کلاس‌های تزویجی ثابت است و هر نمایش تحویل‌ناپذیر V، اگر $\sum_{g \in G} \alpha(g)\chi_V(g) = ۰$ آن‌گاه $\alpha = ۰$. فرض کنید V نمایشی تحویل ناپذیر است. نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$\varphi_{\alpha,V} = \sum_{g \in G} \alpha(g) g \in End(V)$$

می‌توان ثابت کرد که $\varphi_{\alpha,V}$ یک $G-$مدول همیومرفیسم از V است. بنابراین با قضیه شور $\varphi_{\alpha,V} = \lambda I_V$ برای یک $\lambda \in \mathbb{C}$. اما طبق فرض:

$$tr(\varphi_{\alpha,V}) = \sum_{g\in G} \alpha(g)\chi_g = \lambda \dim(V) = ۰$$

پس $\lambda = ۰$ و این یعنی $\varphi_{\alpha,V}$ برای هر نمایش تحویل‌ناپذیر V صفر است. اما با تجزیه هر نمایش به نمایش‌های تحویل‌ناپذیر، $\varphi_{\alpha,V}$ برای هرنمایش V صفر است. اما این نمی‌تواند برقرار باشد زیرا با قرار دادن $V = \mathbb{C}[G]$ داریم:

$$\varphi_{\alpha,V} = \sum_{g\in G} \alpha(g)g = ۰$$

و بنابراین:

$$\varphi_{\alpha,V}(id) = \sum_{g\in G} \alpha(g)g(id) = ۰$$

اما $g(id)$ ها برای $g \in G$ مستقل خطی هستند در نتیجه $\alpha(g) = ۰$ برای هر $g \in G$ و یا $\alpha = ۰$. $\square$

کتاب‌نامه

[۱] A.Hora, N.Obata *Quantum Probability and Spectral Analysis of graph.* Springer-Verlag, New York, 2007.

[۲] David Aldous and Persi Diaconis *Longest increasing subsequences: from patience sorting to the Baik-Deift-Johansson theorem.* Bull. Amer. Math. Soc. 36 (1999), 413-432

[۳] David Aldous and Persi Diaconis *Hammersley's Interacting Particle Process and Longest Increasing Subsequences .*

Probab. Th. Rel. Fields (1995)

[۴] Jinho Baik , Percy Deift , Kurt Johansson *On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations.*

J. Amer. Math. Soc

[۵] BF Logan, LA Shepp *On A variational problem for random Young tableaux* Advances in Mathematics, 1977 - Elsevier

[۶] B Bollobás, P Winkler *On The longest chain among random points in Euclidean space.* Proceedings of the American Mathematical Society, 1988

Hammersly model and largest increasing subsequence in a random permutation

Abstract

One of the important research in probability theory is the study of the asymptotic behaviors of the random structures. In this thesis, Hammersly model, the longest increasing subsequence in random permutations, has been investigated. It goes back to 1960's originally and during the next decade many important tools developed and finally the problem settled in 1970's. Recently, its relations with other branches such as random matrix theory are found. In the thesis, an overview of the subject is presented and two different proofs are stated.

Keywords: Random Permutation, Largest increasing subsequence, Hammesly Model, Young Diagram, Representation of Symmetric group .

Sharif University of Technology
Department of Mathematical Sciences

Ms Thesis
Pure Mathematics

Hammersly model and largest increasing subsequence in a random permutation

By
Roozbeh Farhoudi

Supervisor
Dr. Alishahi

December, 2010