نگاهی هندسی به مسأله‌ای حدی در احتمال

روزبه فرهودی

۱ چکیده

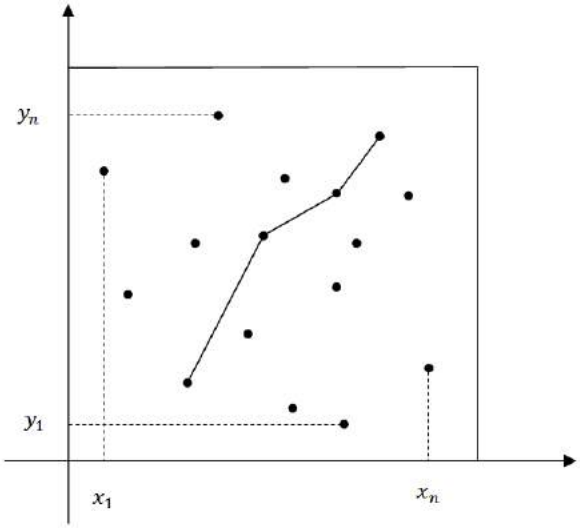
بررسی رفتارهای حدی پدیده‌های تصادفی، در احتمالات بسیار اهمیت دارد. زیرا معمولاً بررسی کمیت‌های منفرد سخت است ولی با بررسی همزمان تمام آن‌ها می‌توان امید داشت با مسأله‌ی ساده‌تری روبرو شویم. یکی از مثال‌های این موضوع بزرگترین زیردنباله‌ی صعودی یک جایگشت است. در این مقاله نشان می‌دهیم برای جایگشت‌های تصادفی می‌توان تخمین خوبی از طول بزرگترین زیردنباله‌ی صعودی بدست آورد. در بخش اول صورت مسأله و تعبیر هندسی آن را می‌گوییم و در بخش‌های بعدی محاسبات لازم انجام می‌دهیم.

۲ بزرگترین زیردنباله‌ی صعودی جایگشت تصادفی

می‌دانیم $n!$ جایگشت از اعداد ۱ تا n وجود دارد. با یک الگوریتم هندسی می‌توانیم جایگشتی را به طور یکنواخت از بین آن‌ها انتخاب کنیم: ابتدا n نقطه به تصادف و به طور یکنواخت از مربع $I = [0,1] \times [0,1]$ انتخاب می‌کنیم (شکل ۱). از آن جا که احتمال قرار گرفتن دو نقطه روی یک خط افقی یا عمودی صفر است؛ تصویر این نقاط روی هریک از محورهای x و y نیز n نقطه‌ی متمایز بدست می‌دهد. آن‌ها را به طور صعودی مرتب می‌کنیم تا به $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ و $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$ برسیم. به ازای یک جایگشت، $\sigma \in S_n$ نقاط در I به شکل $\{(x_i, y_{\sigma(i)}) | 1 \le i \le n\}$ هستند و به علت تقارن، جایگشت σ به طور یکنواخت از بین تمام جایگشت‌ها انتخاب شده است. به این طریق، انتخاب n نقطه در مربع به یک جایگشت یکنواخت منجر می‌شود. در این تعبیر هندسی یک زیر دنباله‌ی صعودی از این جایگشت متناظر در نظر گرفتن نقاطی است که پاره‌خط‌های واصل بین آن‌ها شیب مثبت داشته باشد. در نتیجه بزرگترین زیردنباله‌ی صعودی معادل طولانی‌ترین دنباله از خطوط شکسته و با شیب مثبت از این نقاط است.

از دید احتمالاتی کار کردن با تعبیر هندسی راحت تر است. در دهه ۶۰ میلادی اولام[۱] با شبیه سازی کامپیوتری حدس زد طول بزرگترین زیردنباله‌ی صعودی جایگشتی تصادفی از S_n، از مرتبه‌ی $2\sqrt{n}$ است. چند سال بعد

[۱] Ulam



شکل ۱: انتخاب یک جایگشت تصادفی معادل انتخاب تعدادی نقطه در مربع است.

همرزلی[۲] با تعبیر هندسی که در بالا گفتیم نشان داد این طول از مرتبه‌ی $c\sqrt{n}$ است و کران‌هایی برای c بدست آورد[۱]. ایده‌ی او این بود که اگر در مربع به ضلع n ، n^2 نقطه و در مربع به ضلع m ، m^2 نقطه به تصادف قرار دهیم و آنها را از روی قطر به امتداد یکدیگر بچسبانیم طول بزرگترین خط شکسته با شیب مثبت در شکل حاصل تقریباً برابر جمع این طول برای دو شکل است. از آنجا شکل چسبانده شده قسمتی از مربع به ضلع $m+n$ است، یک نامساوی برای میانگین طول بزرگترین زیردنباله‌ی صعودی بدست می‌آوریم که مرتبه را نتیجه می‌دهد. در اینجا قصد داریم این استدلال را به طور دقیق ثابت کنیم.

۳ تقریب با فرایند پواسون

احتمالاً از درس احتمال با فرایند پواسون آشنا هستید. این فرایند برای مدل کردن زمان‌هایی که افرادی به صف وارد می‌شوند استفاده می‌شود. از آنجا که این زمان‌ها را می‌توان با نقاطی روی خط نشان داد به آن، فرایند نقطه‌ای پواسون هم می‌گویند. ویژگی اصلی آن تقارن نسبت به مکان است. یعنی به طور شهودی چگالی نقاط در طول خط ثابت است. مقدار این چگالی نرخ ورود افراد به صف را مشخص می‌کند. در این نگاه، مفهوم زمان کنار گذاشته می‌شود و به فرایند پواسون به شکل یک اندازه‌ی احتمال روی فضای تمام زیرمجموعه‌های گسسته‌ی اعداد حقیقی نگاه می‌شود. این نگاه مجرد را می‌توان به دو بعد تعمیم داد و بنابراین فرایند نقطه‌ای پواسون با نرخ یک در صفحه، فرایندی تصادفی با دو شرط است :

[۲] Hammersley

شکل ۲: جان همرزلی

۱. تعداد نقاط واقع در هر مستطیل از صفحه متغیری پواسون با نرخ مساحت آن است.

۲. تعداد نقاط دو زیر مجموعه‌ی مجزا از صفحه مستقل از هم است.

متغیر تصادفی $L_n(\sigma)$ را طول بزرگترین زیردنباله‌ی صعودی $\sigma \in S_n$ می‌گیریم و برای فرایند نقطه‌ای پواسون $\mathcal{N}$ روی کل صفحه، متغیر تصادفی $L^{\nearrow}(x,y)$ را برابر با تعداد نقاط روی بزرگترین خط شکسته‌ی با شیب مثبت در ناحیه‌ی $[0,x]\times[0,y]$ قرار می‌دهیم و برای $x \in \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \mathbb{E}(L^{\nearrow}(x,x))$$

از آن‌جا که برای فرایند $\mathcal{N}$ در مربع $[0,\sqrt{n}]\times[0,\sqrt{n}]$ تقریباً n نقطه وجود دارد، انتظار داریم $L^{\nearrow}(\sqrt{n},\sqrt{n})$ و L_n نزدیک به یکدیگر باشند. برای سادگی متغیر تصادفی $L^{\nearrow}(\sqrt{x},\sqrt{x})$ را با $L_x^{\nearrow}$ نشان می‌دهیم.

همان‌طور که در بالا گفتیم؛ همرزلی مشاهده کرد که با کنار هم قرار دادن دو خط شکسته‌ی با شیب مثبت، یکی از $(0,0)$ تا (t,t) و دیگری از (t,t) تا $(t+s,t+s)$ یک خط شکسته‌ی با شیب مثبت از $(0,0)$ تا $(t+s,t+s)$ بدست می‌آید. به علت ناوردا بودن فرایند پواسون تحت انتقال، متغیر تصادفیِ بزرگترین خط شکسته با شیب مثبت از نقطه‌ی (t,t) تا $(t+s,t+s)$ فرقی با متغیر تصادفی مشابهی که از $(0,0)$ به (s,s) می‌رسد، ندارد. در نتیجه متغیر تصادفی $\tilde{L}^{\nearrow}(s,s)$ هم‌توزیع با $L^{\nearrow}(s,s)$ وجود دارد که:

$$L^{\nearrow}(t,t) + \tilde{L}^{\nearrow}(s,s) \le L^{\nearrow}(t+s,t+s)$$

و با امید ریاضی گرفتن از طرفین:

$$g(t) + g(s) \le g(t+s) \tag{1}$$

به توابعی که برای هر s و t در رابطه ۱ صدق می‌کنند ابرجمعی می‌گوییم. لم مشهوری که در زیر می‌آوریم نشان می‌دهد رشد توابع ابرجمعی به صورت خطی است.

لم ۱ (فکت). [۳] *فرض کنید تابع* $g : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *ابرجمعی باشد و* $c = \sup_t \frac{g(t)}{t}$. *در این صورت:*

$$c = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{g(t)}{t}$$

اثبات. $t \in \mathbb{R}^+$ را ثابت بگیرید. برای هر $x \in \mathbb{R}^+$ عدد صحیح و نامنفی n و عدد حقیقی $0 \le r < t$ یافت می‌شوند که $x = nt + r$. از ابرجمعی بودن نتیجه می‌شود:

$$ng(t) + g(r) \le g(x)$$

در نتیجه:

$$\frac{n}{nt+r} g(t) + \frac{g(r)}{x} \le \frac{g(x)}{x}$$

و بنابراین با میل دادن x به بینهایت:

$$\frac{g(t)}{t} = \liminf_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{nt+r}g(t) + \frac{g(r)}{x}\right) \le \liminf_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$$

از آن‌جا که نامساوی بالا برای هر $t \in \mathbb{R}^+$ برقرار است:

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{g(t)}{t} \le \liminf_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$$

بنابراین $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ وجود دارد و برابر $c = \sup_t \frac{g(t)}{t}$ است □

از لم بالا نتیجه می‌شود $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(L_x^{\nearrow})}{\sqrt{x}}$ وجود دارد. علاوه بر این با استفاده از لم فکت برای متغیرهای تصادفی می‌توان نشان داد حد $\frac{L_x^{\nearrow}}{\sqrt{x}}$ تقریباً به ازای هر نمونه از فرایند نقطه‌ای پواسون وجود دارد[۲].

۴ وجود حد برای جایگشت‌ها

تاکنون دیدیم $\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(L_n^{\nearrow})}{\sqrt{n}}$ وجود دارد. اما در مربع $[0,\sqrt{n}] \times [0,\sqrt{n}]$ الزاماً n نقطه قرار ندارد. در این قسمت نشان می‌دهیم بین دو متغیر تصادفی $L_n^{\nearrow}$ و L_n تفاوت زیادی نیست و می‌توان وجود $\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(L_n)}{\sqrt{n}}$ را هم نشان داد. این کار با دو لم انجام می‌شود:

لم ۲. *برای هر k و n طبیعی:*

$$\mathbb{P}(L_n \le k) \le \mathbb{P}(L_{n-1} \le k)$$

[۳] Fekete lemma

اثبات. نگاشت $R : S_n \longrightarrow S_{n-1}$ را به این شکل تعریف می‌کنیم که ابتدا هر جایگشت $\sigma \in S_n$ را با دنباله‌ی $[\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)]$ نمایش می‌دهیم. حال با حذف جمله‌ای که برابر با n شده است به جایگشتی از S_{n-1} می‌رسیم.
از آنجا که R نگاشتی n به ۱ است، اندازه‌ی احتمال یکنواخت را ناوردا نگاه می‌دارد. از تعریف این نگاشت می‌توان دید

$$\forall \sigma \in S_n : \quad L_{n-1}(R(\sigma)) \le L_n(\sigma)$$

که به راحتی لم را نتیجه می‌دهد. □

لم ۳. *فرض کنید n عددی طبیعی و به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد. k را عددی دل‌خواه در فاصله ۱ تا n بگیرید. تعریف می‌کنیم*

$$M_n = \lfloor n + 4\sqrt{n \log n} \rfloor$$

و

$$m_n = \lfloor n - 4\sqrt{n \log n} \rfloor$$

در این صورت ثابت c مستقل از n و k یافت می‌شود که:

$$\mathbb{P}(L_{M_n} \le k) - \frac{c}{n^3} \le \mathbb{P}(L_n^{\nearrow} \le k) \le \mathbb{P}(L_{m_n} \le k) + \frac{c}{n^3}$$

اثبات. با شرطی کردن روی تعداد نقاط در مربع $[0, \sqrt{n}] \times [0, \sqrt{n}]$ داریم:

$$\mathbb{P}(L_n^{\nearrow} \le k) = \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{e^{-n} n^t}{t!} \mathbb{P}(L_t \le k) = \sum_{t=1}^{+\infty} \omega_n(t) \mathbb{P}(L_t \le k)$$

که $\omega_n(t) = \frac{e^{-n} n^t}{t!}$. سری بالا را به چهار دسته زیر تقسیم می‌کنیم:

$$\sum_{t=1}^{+\infty} \omega_n(t) \mathbb{P}(L_t \le k) = \sum_{1}^{n-4\sqrt{n\log n}} + \sum_{n-4\sqrt{n\log n}}^{n+4\sqrt{n\log n}} + \sum_{n+4\sqrt{n\log n}}^{2n} + \sum_{2n}^{\infty}$$

ثابت می‌کنیم سهم اصلی سری بالا روی جمله دوم (tهای نزدیک به n) است.

ابتدا از برای تقریب استرلینگ استفاده می‌کنیم:

$$\omega_n(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-(n + t \log \frac{t}{n} - t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-f(t))$$

که $f(t) = n + t \log \frac{t}{n} - t$. با محاسباتی سرراست دیده می‌شود که $f''(t) = \frac{1}{t}$ و در نتیجه f تابعی محدب است که علاوه بر آن چون تنها در نقطه $t = n$ صفر می‌شود، تابعی نامنفی نیز هست.

برای جمله‌ی چهارم سری بالا یعنی $t > 2n$ می‌توان نوشت:

$$f(t) \ge f(2n) + (t - 2n) f'(2n) =$$
$$n(2\log 2 - 1) + (t - 2n)\log 2 = t \log 2 - n$$

که نشان می‌دهد:

$$\sum_{2n \le t} \omega_n(t) \mathbb{P}(L_t \le k) \le \sum_{2n \le t} \omega_n(t) \le e^{-c_1 n}$$

که c_1 عددی مثبت و مستقل از n است. پس با افزایش n این سری به مقدار کافی کوچک خواهد شد.

برای جملات اول و سوم می‌دانیم $2n \le t$. چون در این فاصله مشتق دوم $f(t) - \frac{1}{4n}(t-n)^2$ بیشتر از صفر است، این تابع مثبت است و در نتیجه برای نقاطی که حداقل فاصله $4\sqrt{n \log n}$ با نقطه n دارند:

$$4 \log n \le f(t)$$

پس:

$$\omega_n(t) \le \exp(-f(t)) \le \frac{c_2}{n^4}$$

که c_2 نیز عددی مثبت و مستقل از n است و مانند مرحله‌ی قبل نشان می‌دهد مجموع جملات اول و سوم نیز حداکثر برابر $\frac{c_2}{n^2}$ است. در نهایت تنها جملات دوم باقی می‌مانند. تعداد آنها $4\sqrt{n \log n} = o(n)$ است می‌دانیم جمع $\omega_n(t)$های ظاهر شده در این سری نزدیک به یک است (زیرا در بالا دیدیم که جمع $\omega_n(t)$ ها برای nهای ظاهر شده در سه سری دیگر کوچک است.) و با توجه به لم ۲ $\mathbb{P}(L_t \le k)$ها نزولی هستند. حال برای رسیدن به کران پایین و بالا به ترتیب جمله‌های M_nام و m_nام را جای‌گذاری می‌کنیم و حکم ثابت می‌شود. □

حال وجود حد را برای جایگشت‌ها اثبات می‌کنیم. می‌دانیم پیشامدهای $L_t \le k$ و $L_t > k$ مکمل هم‌دیگرند. پس:

$$\mathbb{P}(L_t \le k) = 1 - \mathbb{P}(L_t > k)$$

و درنتیجه لم قبل را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\mathbb{P}(L_{m_n} > k) - \frac{c}{n^3} \le \mathbb{P}(L_n^{\nearrow} > k) \le \mathbb{P}(L_{M_n} > k) + \frac{c}{n^3}$$

از آنجا که برای هر متغیر تصادفی مثبت:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \ge 0} \mathbb{P}(X > k)$$

با جمع زدن روی $k = 1, \dots, 2n$ بدست می‌آوریم:

$$\mathbb{E}(L_{m_n}) - \frac{c}{n^2} \le \mathbb{E}(L_n^{\nearrow}) - \sum_{k \ge 2n} \mathbb{P}(L_n^{\nearrow} > k) \le \mathbb{E}(L_{M_n}) + \frac{c}{n^2}$$

اما اگر L_n بیشتر از k باشد، باید داخل مربع $[0, \sqrt{n}] \times [0, \sqrt{n}]$ بیش از k نقطه وجود داشته باشد که این نشان می‌دهد:

$$\mathbb{P}(L_n^{\nearrow} > k) \le \frac{e^{-n} n^k}{k!} \le e^{-ck}$$

که نشان می‌دهد جمله $\sum_{k \ge 2n} \mathbb{P}(L_n^{\nearrow} > k)$ حداکثر به شکل e^{-cn} است و در نتیجه:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{E}(L_n)}{\sqrt{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{E}(L_n^{\nearrow})}{\sqrt{n}}$$

۵ کران‌های بالا و پایین برای c

در بخش قبل دیدیم $c=\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathbb{E}(L_n)}{\sqrt{n}}$ وجود دارد. در این بخش کران‌هایی برای c بدست خواهیم آورد و مشاهده می‌کنیم $c\neq 0,+\infty$. ابتدا کران پایینی برای c ارائه می‌دهیم. قضیه‌ی زیر نتیجه یکی از قضایای معروف درباره زنجیرها در یک مجموعه‌ی مجهز به طور جزیی مرتب است که اثبات آن در اکثر مرجع‌های ترکیبیاتی یافت می‌شود.

قضیه ۴ (اردوش-زاکر). [۴] *فرض کنید n و m دو عدد طبیعی هستند. در این صورت هر جایگشت در S_{nm+1} یا زیردنباله‌ای صعودی به طول $n+1$ و یا زیردنباله‌ای نزولی به طول $m+1$ دارد.*

اگر در این قضیه m را برابر n قرار دهیم نتیجه می‌شود هر جایگشت در S_{n^2+1} یا یک زیردنباله‌ی صعودی یا یک زیردنباله‌ی نزولی به طول n دارد. با استفاده از این موضوع ثابت می‌کنیم $c\geq\frac{1}{2}$. می‌دانیم c حد دنباله‌ی $\frac{\mathbb{E}(L_n)}{\sqrt{n}}$ است. در نتیجه با در نظر گرفتن زیردنباله‌ی $\{n^2+1\}_{n=1}^{+\infty}$ از اعداد طبیعی:

$$c=\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathbb{E}(L_{n^2+1})}{n}$$

برای هر عدد طبیعی n، $l_n(\sigma)$ را متغیر تصادفی طول بلندترین زیردنباله‌ی نزولی σ بگیرید. از آن‌جا که با از چپ به راست نوشتن یک جایگشت، زیردنباله‌های نزولی به صعودی تبدیل می‌شوند؛ توزیع‌های دو متغیر تصادفی l_n و L_n یکی است و بنابراین $\mathbb{E}(L_n)=\mathbb{E}(l_n)$ و درنتیجه قضیه‌ی اردوش-زاکر معادل است با اینکه برای هر $\sigma\in S_{n^2+1}$:

$$n\le L_{n^2+1}(\sigma)+l_{n^2+1}(\sigma)$$

و اگر از طرفین امید ریاضی بگیریم:

$$n\le \mathbb{E}(L_{n^2+1})+\mathbb{E}(l_{n^2+1})$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{1}{2}\le\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathbb{E}(L_{n^2+1})}{n}$$

بنابراین $c\geq\frac{1}{2}$.

البته با استفاده از لم ۱ می‌توان کران پایین‌های دیگری یافت، زیرا هر جمله $\frac{\mathbb{E}(L_n^{\nearrow})}{\sqrt{n}}$ یک کران پایین برای c است. با قرار دادن $n=1$ خواهیم داشت $\mathbb{E}(L_1^{\nearrow})\le c$. ولی در مربع $[0,1]\times[0,1]$ به احتمال $\frac{1}{e}$ حداقل یک نقطه واقع است و این نشان می‌دهد که:

$$\frac{1}{e}\le c$$

با استفاده از لم زیر کران بالایی برای c بدست می‌آوریم:

لم ۵. *برای هر $k\le n$ طبیعی:*

$$\mathbb{P}(k\le L_n)\le\min\{1,\frac{1}{k!}\binom{n}{k}\}$$

[۴]Erdos-Szkeres Theorem

اثبات. کافیست نشان دهیم $\mathbb{P}(k\le L_n)\le\frac{1}{k!}\binom{n}{k}$. اعداد

$$1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$$

را ثابت فرض کنید. بنا به تقارن احتمال این‌که

$$\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots,\sigma(i_k)$$

زیردنباله‌ای صعودی در σ باشد $\frac{1}{k!}$ است. از طرفی به $\binom{n}{k}$ طریق می‌توان اعداد $i_1,i_2,\dots,i_k$ را انتخاب نمود و اگر $k\le L_n(\sigma)$ باید یکی از این زیردنباله‌ها صعودی باشد که این حکم نتیجه می‌دهد. □

می‌خواهیم از طرف راست لم بالا حد بگیریم و نشان دهیم: $c\le e$. داریم:

$$\mathbb{E}(L_n)=\sum_{1\le k\le n}\mathbb{P}(k\le L_n)\le\sum_{1\le k\le n}\min\{1,\frac{1}{k!}\binom{n}{k}\}$$
$$\le\sum_{1\le k\le n}\min\{1,\frac{n^k}{(k!)^2}\}=\sum_{1\le k\le e'\sqrt{n}}+\sum_{e''\sqrt{n}<k\le n}$$

که $e\le e'\le e''$ اعدادی نزدیک به e هستند. جملات مجموع اول را با ۱ تخمین می‌زنیم و در نتیجه مقدار آن از $e'\sqrt{n}$ کمتر می‌شود. برای جملات مجموع دوم از تقریب استرلینگ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{n^k}{(k!)^2}\le(\frac{e'\sqrt{n}}{k})^{2k}\le(\frac{e'}{e''})^{2e''\sqrt{n}}$$

در نتیجه مجموع کل جملات سری دوم از $n(\frac{e'}{e''})^{2e'\sqrt{n}}$ کمتر است. از آنجا که این عدد از مرتبه‌ی $o(\sqrt{n})$ است، در حد، قابل چشم پوشی است. بنابراین تنها جملات سری اول اهمیت دارند که با میل دادن e'' به e نتیجه می‌شود $c\le e$.

۶ ارتباط با مسائل دیگر

همان‌طور که گفته شد، قدمت این مسأله به دهه‌ی شصت میلادی می‌رسد و بعد از اثبات همرزلی تلاش‌های بسیاری شد تا مقدار c بدست آید. در نهایت این مسأله به عنوان حالت خاصی از یک مسأله‌ی کلی‌تر توسط ورشیک[۵] و کرووو[۶] اثبات شد[۳]. مسأله‌ی کلی، شکل حدی نمایش‌های گروه جایگشتی است که در حدود سال‌های ۱۹۷۰ میلادی یکی از مسائل داغ نظریه‌ی نمایش بود. ارتباط جالبی بین بزرگترین زیردنباله‌ی صعودی و نمودار یانگ که در نمایش‌های گروه جایگشتی ظاهر می‌شوند وجود دارد. به تازگی نیز پیشرفت‌های جالبی درباره‌ی ارتباط آن با مسائل دیگر شناخته شده است که مهمترین آن مسأله‌ی ماتریس‌های تصادفی است. به عنوان مثال می‌توان نشان

[۵]Vershik
[۶]Kerov

داد توزیع L_n با توزیع بزرگترین مقدار ویژه‌ی یک ماتریس تصادفی گوسی یکی است. علاوه بر این کمیت $L_n - ۲\sqrt{n}$ نوساناتی دارد. نشان داده شده این نوسانات از مرتبه‌ی $O(n^{\frac{۱}{۶}})$ است.

مراجع

[۱] Hammersley, J.M. A Few Seedlings of Research, Proc. 6th Berkeley symp. math. statist. and probability, vol. 1, pp. 345–394, California University of California Press 1972

[۲] Michael J. Steele (2011), CBMS Lectures on Probability Theory and Combinatorial Optimization, University of Cambridge.

[۳] Quantum Probability and Spectral Analysis of graph, Springer-Verlag, New York, 2007.